Notas de Ramsey sobre o Tractatus de Wittgenstein e versão preliminar dos Foundations of Mathematics

Transcrição, tradução e introdução de Anderson Luis Nakano
Pós-doutorando em Filosofia pela USP / Fapesp
andersonnakano@gmail.com

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

Introdução

As notas aqui publicadas são de autoria de Frank Plumpton Ramsey, e foram transcritas e traduzidas de manuscritos que compõem a "Ramsey Collection", coleção disponível na Hillman Library da Universidade de Pittsburg[1]. Trata-se de textos inéditos que incluem três conjuntos de notas e um grande esboço e versão preliminar do artigo *The Foundations of Mathematics* de Ramsey, publicado em 1925. Um pequeno índice dos textos é fornecido abaixo (com referência à numeração padrão da coleção):

A seleção do material baseou-se tanto no caráter inédito dos textos[2] quando na unidade que eles formam em torno das reflexões de Ramsey sobre o *Tractatus* de Wittgenstein. Estes manuscritos se mostram relevantes quando se trata de avaliar não apenas o impacto da obra de Wittgenstein sobre Ramsey, mas também os pontos em que Ramsey procura se afastar desta influência. Os temas centrais destes manuscritos, como se pode presumir a partir dos títulos acima, são a lógica e a matemática, vistos sob o prisma da primeira obra de Wittgenstein.

O primeiro texto, numerado como 002-26-01, inicia com um comentário a respeito do princípio tractariano da bipolaridade essencial à proposição. As aparentes exceções são divididas em duas classes: i) tautologias e contradições; ii) aquilo que não se diz, mas que se mostra em proposições. Esta última classe é, por sua vez, dividida em três seções: a) propriedades internas de objetos; b) propriedades internas de proposições e, finalmente, c) identidade. Com base na distinção entre dizer e mostrar, Ramsey recupera a separação, feita no *Tractatus*, entre propriedades reais (que correspondem a funções ou classes) e propriedades formais (que correspondem a variáveis). Ramsey trata, então, da convenção do *Tractatus* para a identidade, e

1 Frank Plumpton Ramsey Papers, 1920 - 1930, ASP. 1983.01 Archives of Scientific Philosophy, Special Collections Department, University of Pittsburgh. Os arquivos digitalizados podem ser encontrados no sítio http://digital2.library.pitt.edu/. Gostaríamos de agradecer a Lance Lugar, o curador destes arquivos, pela permissão de publicar a transcrição e a tradução destes manuscritos.

2 Uma grande parte dos manuscritos de Ramsey foi transcrita e publicada em (GALAVOTTI, 1991). Os textos aqui publicados, porém, não se encontram neste volume.

na sequência avalia os "efeitos destrutivos" da concepção tractariana da identidade para uma aritmética baseada em classes, tal como nos *Principia Mathematica*. Isso o conduz à aritmética tal como exposta no *Tractatus*, que não trata as equações matemáticas como tautologias, mas como equações.

Ramsey reescreve, neste ponto, as frases que Wittgenstein adicionou à margem de sua cópia do *Tractatus*: "A ideia fundamental da matemática é o cálculo representado aqui pela operação; o começo da lógica pressupõe o cálculo e, portanto, o número; o número é a ideia fundamental do cálculo e deve ser introduzido deste modo". Ramsey, porém, abandona a concepção tractariana da aritmética, pois se vê incapaz de aplicá-la para expressar proposições tão simples quanto "o quadrado do número de ingleses é igual ao cubo do número de franceses menos três". É a partir desta reflexão que Ramsey procura conceber a ideia de uma "função proposicional em extensão", ideia central para o seu artigo de 1925 e que é posteriormente criticada por Wittgenstein em seus escritos do período intermediário. Esta ideia é de extrema importância para seu tratamento da identidade, tratamento que lhe permitirá erigir uma teoria (extensional) das classes e, com ela, uma aritmética baseada em classes, sem que esta teoria esteja exposta aos mesmos problemas da concepção da identidade dos *Principia Mathematica*. O final do manuscrito traz algumas observações sobre o modo como Wittgenstein concebia a atividade filosófica, a saber, como uma análise das proposições de nossa linguagem com a finalidade de tornar claro o seu sentido.

O segundo texto, de número 002-27-01, inicia com uma exposição de certos aspectos da lógica do *Tractatus*, para em seguida considerar a análise de sentenças da forma "A diz p" (*oratio obliqua*) ou "A crê que p". Toda a dificuldade é analisar o sentido destas sentenças quando ocorrem, em p, constantes lógicas, como a negação, por exemplo. O cerne da dificuldade será analisar estas sentenças sem que a análise se torne dependente de uma notação ou linguagem particular. Ramsey vai fornecer uma solução com base essencialmente naquilo que Wittgenstein diz no *Tractatus*. Este material é interessante para se observar a evolução do pensamento de Ramsey em conjunto com artigos como *Facts and Propositions* (1927), por exemplo. Neste último artigo, Ramsey se vê incapaz de analisar a sentença "A crê que ~*a*R*b*" sem fazer referência a uma linguagem particular, tomando como "ilusórias" as maneiras em que esta análise poderia supostamente ser feita[3]. Há, portanto, um claro abandono de uma solução anteriormente considerada para a análise deste tipo de sentença doxástica.

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

3 Cf. (RAMSEY, 1931b, p. 149).

Na sequência, Ramsey detêm-se na teoria da generalidade do *Tractatus*, mencionando que esta teoria se vincula essencialmente a três outras doutrinas tractarianas: i) à teoria da identidade; ii) à teoria segundo a qual "*a* existe" é um contrassenso; iii) à teoria de que objetos existem necessariamente. Uma proposição geral, no *Tractatus*, é dita ser apenas um certo modo de apresentação de uma função de verdade de proposições elementares, e não cria, portanto, uma hierarquia de ordens como nos *Principia Mathematica*. Isso pareceu a Ramsey ser a chave para se livrar do Axioma da Redutibilidade e para construir um sistema de lógica baseado em uma hierarquia simples de tipos. O final do manuscrito compara a teoria da generalidade de Wittgenstein com a teoria da generalidade baseada em universais, e mostra as vantagens da teoria de Wittgenstein sobre esta teoria.

O manuscrito numerado como 004-03-01 é um esboço sobre a lógica desenvolvida, nos *Foundations of Mathematics*, para defender a estratégia logicista de fundamentação da matemática. Além de repetir a crítica direcionada à aritmética do *Tractatus*, Ramsey começa a trabalhar nas suas "funções generalizadas" (funções proposicionais em extensão), que vão conduzi-lo à extensionalizar a lógica para dar conta da matemática. Ele nota, porém, que esta concepção da noção de "função" pode ser criticada por confundir o argumento de uma função com o índice de um nome. Wittgenstein já fazia essa objeção, no *Tractatus*, à teoria semântica de Frege, repetindo-a posteriormente (nos textos do início da década de 1930) para atacar a teoria de Ramsey. O que se mostra, neste manuscrito, é que Ramsey foi capaz de vislumbrar esta crítica a sua teoria, embora não haja indícios de nenhuma resposta a ela.

Por fim, o último texto, numerado como 006-01-01, é claramente uma versão preliminar dos *Foundations of Mathematics*. Percebe-se, a partir deste texto, que Ramsey avaliou publicar este artigo no formato de um pequeno livro (com marcações em lápis de Ramsey da divisão em capítulos), e apenas posteriormente Ramsey decidiu dividir este material em diversos artigos que foram, então, publicados separadamente. Estes artigos incluem, além de *The Foundations of Mathematics*, *Mathematical Logic* (1926), *Universals* (1925) e, por fim, sua resenha crítica do *Tractatus Logico-Philosophicus* de 1923.

O manuscrito é composto de uma longa introdução, em que Ramsey procura atacar a concepção da matemática dos *Principles of Mathematics* de Russell (que tratava as proposições matemáticas como proposições completamente gerais), aderindo à concepção do *Tractatus*, segundo a qual a matemática não é composta de proposições genuínas, mas de fórmulas para facilitar o reconhecimento de inferências na lógica. Em seguida, Ramsey procura fornecer uma maneira logicamente genuína de se fazer a distinção gramatical entre adjetivos e substantivos para, então, descrever uma hierarquia simples de tipos. A próxima dificuldade contemplada é o percurso de valores da quantificação de ordem superior. Ramsey distingue dois métodos de se estipular esta totalidade: o método "subjetivo" e o método "objetivo" (uma referência a estes dois métodos já é feita em 002-26-01). O primeiro método, o dos *Principia Mathematica*, consiste em estabelecer certos princípios de construção simbólica e definir esta totalidade como sendo todos os símbolos que podem ser construídos de acordo com estes princípios. O segundo método, adotado por Ramsey, é determinar esta totalidade por uma descrição geral dos membros desta totalidade. Ramsey faz notar que este método torna certas construções impredicativas legítimas, e que ele possui a vantagem (sobre o primeiro) de não tornar necessário o Axioma da Redutibilidade. Por fim, Ramsey traça sua conhecida divisão dos paradoxos em lógicos e semânticos, e mostra como sua teoria soluciona, de modo distinto do modo dos *Principia*, os paradoxos semânticos.

Ao editar o material, procurei preservar o tanto quanto possível o material original. Adições de texto a fim de facilitar a leitura do material foram indicadas por meio de colchetes. Notas marginais de Ramsey ou deslocadas do texto foram inseridas entre parêntesis. Abreviações foram completadas e pontuações acrescentadas com o intuito de favorecer a leitura do texto. Símbolos abreviatórios foram substituídos por palavras (*e.g.*, ∴ foi substituído por "portanto"). Palavras e frases sublinhadas foram italicizadas. Palavras e sentenças riscadas ou marcadas com tachado simples foram excluídas. Raríssimas expressões cuja grafia foi tomada como incompreensível estão ausentes.

Gostaria, por fim, de agradecer a dois revisores anônimos pelas sugestões e também à FAPESP pelo suporte financeiro dado por meio de bolsa de pós-doutoramento (proc. n. 2015/25646-6).

Referências Bibliográficas

GALAVOTTI, M. C. (ed.). *Notes on Philosophy, Probability and Mathematics*, Napoli: Bibliopolis, 1991.

RAMSEY F. P. The Foundations of Mathematics. In: RAMSEY, F. P. *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, London: Routledge, 1931a, pp. 1–61.

____________. Facts and Propositions. In: RAMSEY, F. P. *The Foundations of Mathematics and other Logical Essays*, London: Routledge, 1931b, p. 149.

WITTGENSTEIN, L. *Tractatus Logico-Philosophicus*. Tradução de Luis Henrique Lopes dos Santos. São Paulo: EdUSP, 1993.

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

1. 002-26-01 Filosofia, Lógica e Matemática

O princípio de Wittgenstein segundo o qual proposições asserem algo possível e não necessário

Exceções aparentes descartadas ou

(a) como tautologias ou contradições;

ou (b) como coisas que não podem ser ditas mas apenas mostradas, ou as contraditórias destas. Estas [compõem] o tópico do misticismo.

Conexão íntima (a aparecer posteriormente) entre as duas.

(a) já discutido;

(b) preferiria dizer "frases contrassensuais (chame-as de pseudo-proposições) falsamente supostas como significativas por analogia" (a ser elucidado).

Quando é (a), quando é (b).

(b) quando não (a): exemplos sobre cores.

Instâncias de (b):

1. Propriedades internas e relações cuja asserção é necessária

Estas, como veremos, não são realmente relações.

e.g. existência: '*a* existe' seria necessário.

Isto é um contrassenso, mas 'O φ existe' tem sentido.

Considera-se que '*a* existe' tem sentido, pois ninguém distingue entre descrições e nomes. Similarmente para '*a* é um objeto' ('*a* é um objeto vermelho' é gramática; '*a* é um objeto' é gramática; '*a* é uma função' é gramática).

2. Próximo caso: propriedades internas de proposições

p contradiz q, p implica q, p é sobre *a*, p é uma tautologia (em que uma proposição está sendo usada com sentido).

Todos [os casos acima são] sem sentido, embora isso não ocorra se p, q são substituídas por descrições (*e.g.* se p é substituída por 'o sentido de "p"')

e.g. Ele me contradisse

≠ (∃p, q). Ele disse p . Eu [disse] q . p contradiz q

mas (∃p) . Ele disse p . Eu disse ~p

Ele disse algo sobre *a*

≠ (∃p) Ele disse p . p é sobre *a*

mas (∃φ). Ele disse φ*a*

Ele disse uma tautologia

= Ele disse um "t", um símbolo constituído de acordo com uma certa lei (soma lógica não de '(∃p). Ele disse p . φp' mas de '∃t. Ele disse t', em que os valores de t [formam] uma série formal).

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

Aqui podemos ver por que ele diz que estas coisas se mostram (φ*a* sobre *a*; p, ~p etc.). Tais propriedades como "sobre *a*" são chamadas de propriedades formais. Elas correspondem a variáveis, não a classes (φ*a* [é uma] variável proposicional). Isso vale também para os termos de uma série ordenada por uma relação formal ou interna.

e.g. *a*R*b* . – [*a*R*b*, ξ, Ω' ξ]

Ω' { (∃ξ...) . aRξ .ξRb} = {(∃ξ, x) : aRξ.ξRx.xRb}

De modo geral [p, ξ, N'ξ]

Distinção essencial entre propriedades formais (variáveis) e propriedades reais (funções ou classes).

Os valores de uma variável devem ser determinados por uma propriedade formal, não real (se real (x):φx ⊃ ψx).

3. Terceiro caso: identidade

a = *a*

a ≠ *b* necessário

Portanto, a identidade é uma relação formal. É possível que elas sejam tautologias? Por exemplo, a definição de Russell x=y .=. φ!x $\equiv_\varphi$ φ!y considera *a* = *a* como uma tautologia e *a* ≠ *b* como não sendo uma tautologia.

Portanto, elas são pseudoproposições. Portanto, [o sinal de] = deve ser eliminável e a identidade mostrada ao invés de dita.

Isto pode ser feito por meio da adoção da convenção de que diferentes signos devam ter diferentes significados.

e.g. (∃x,y):f(x,y) deve ser escrito [do seguinte modo:] (Ex,y).f(x,y) .v. (∃x).f(x,x).

(ıx)(φx) = *a* [deve ser escrito do seguinte modo:] φ*a* . ~:(∃x,y).φx.φy

f(ıx)(φx) = (∃x).fx.φx : ~(∃x,y).φx.φy

Portanto o sinal de identidade não é um constituinte essencial da notação lógica.

a = *a*, *a* = *b* . *b* = *c* ⊃ *a* = *c*, (∃x) . x = *a* são vistos como sem sentido.

Objeções. Por que se importar em distinguir indiscerníveis? Número e identidade (relação biunívoca) (∃x, y): φx $\equiv_\varphi$ φy (descrições)

Confusão é não *a* ≠ *b*, que envolve distinção.

Dificuldades desta convenção:

(1) Seu escopo. (x).fx .v. (∃y).φy

(2) (∃x,y): f(x,y)

x,y devem ser diferentes.

Isto é (∃x) : (∃y). f(x,y) i.e. em (∃y) : f(a,y)y ≠ *a.*

Isto deve depender de *a* ocorrer no sentido de f(*a*,y); ou de "*a*" ocorrer em f(*a*,y).

Deve ser a última [opção]; qualquer coisa pode ocorrer no sentido *e.g.* ∃y : (x) fx,y.

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

Se considerarmos a última, não o sentido, ficamos com uma confusão terrível sobre [o uso de uma] definição.

Se definimos:

F(x) = fx,*a* Df.

(x).Fx ≠ (x).fx,*a* !

(Realmente temos constantes formais).

Portanto, é extremamente difícil de se lidar com a convenção.

Substitua-a pela seguinte; use ambas as ideias:

(a) dos *Principia* (x) : (∃y) :

(b) de Wittgenstein, que pode ser denotada por um traço

(∃–x,y): implica diferença (apenas para ∃ juntamente com variáveis)

(∃ x,y) não [implica] diferença

Deste modo, Wittgenstein fez algo além do que substituir = por algo diferente?

Não, mas isto é de todo modo um aperfeiçoamento lógico.

(∃–x,y):f(x,y) é uma certa função de verdade dos valores de f(x,y) i.e. a soma de todos os valores para funções de diferentes argumentos.

(∃x,y):fx,y . x≠y pretende ser função de verdade dos valores f(x,y). x≠y. (o que é x ≠ y?)

A identidade é parte da combinação e da seleção de proposições atômicas, não das proposições atômicas ou matriz.

E a teoria de Wittgenstein reconhece isto.

A filosofia também os torna internos ao sinal.

Wittgenstein sobre a lógica e a matemática.

A lógica consiste de tautologias. A matemática, de pseudoproposições.

Wittgenstein também separa proposições genuínas que envolvem identidade de contrassensos, *e.g.*, (∃x) . x = a.

(Coloque na seção sobre Números Cardinais Finitos)

$\hat{x}(\varphi x) \in 1$ = (∃y): φx $\equiv_x$ x=y = (∃x).φx : ~(∃x,y).φx.φy.

$\hat{x}(\varphi x) \in n$ é o termo geral de uma série formal. (indução deve ser uma série formal) outra acepção malogra.

Efeitos destrutivos:

[Não há] Nenhuma classe definida por função proposicional que é composta de *a*, *b* (x = *a* v x = *b* é inadmissível).

Portanto, pode não haver classes de 2 membros (2 = 1) (tudo em tríades similares)

Intensional

Uma teoria das classes e números simplesmente colapsa.

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

Está tudo certo com a teoria dos *Principia* e sua definição da identidade, mas todos os casos podem fornecer números errados.

Que tipo de teoria podemos ter ao invés disso?

Veja acima.

O que pode então n > m

n = msignificar?

n < m

$Nc'\hat{x}(\varphi x) \geq n$ é o enésimo termo em uma certa série supostamente conhecida**.**

(Nc' = n é ≥n . ≤n)

Tente para n ≥ m.

(φ): $Nc'\hat{x}(\varphi x) \geq n$.⊃. $Nc'\hat{x}(\varphi x) \geq m$(p)

Isto será uma tautologia se 'n ≥ m', mas se 'n < m' ela ainda pode ser verdadeira.

Portanto, 'n ≥ m' e 'n < m' não são incompatíveis.

Parece que 'n ≥ m' não é, na verdade, a proposição 'p' acima, mas [sim a proposição] "que 'p' é uma tautologia".

E temos que distinguir 'n < m', que é equivalente a "'p' não é uma tautologia", de não-p.

i.e. esta tentativa de tornar a matemática tautológica colapsa.

De modo similar a qualquer teoria parecida.

Portanto, [somos levados à] teoria de Wittgenstein segundo a qual, embora a lógica seja composta de tautologias, a matemática (*e.g.* m>n) não é. (mas sendo necessária, como não é uma tautologia, é uma [proposição] demonstrada).

A utilidade da matemática e da lógica formal (não da lógica crítica)

Não [se trata de] proposições, mas de fórmulas para reconhecer inferências lógicas quando estas são complicadas.

e.g. tautologias da forma p⊃q

identidades que expressam a substituibilidade de duas expressões *salvo sense non solum salva veritate*.

A matemática é, ao menos parcialmente, da última forma.

Números: índices de operações.

(A ideia fundamental da matemática é o cálculo representado aqui pela operação.)

(O começo da lógica pressupõe o cálculo e, portanto, o número.)

(O número é a ideia fundamental do cálculo e deve ser introduzido deste modo.)

$\Omega^{m+n} = \Omega^m . \Omega^n$

$\Omega^{mn} = (\Omega^m)^n$

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

inclui Nc’ $\varphi\hat{x}$= n

2+2 = 4 é que ‘Ω^{2+2} p’ e ‘Ω^4 p’ são a mesma proposição.

Isto não pode ser dito a menos que você a considere como sobre marcas ou outras descrições das proposições.

Claramente até mesmo a matemática elementar não consiste, em sua totalidade, de identidades. Devemos também ter funções de verdade delas; em algum sentido podemos definir proposições matemáticas.

$x^3 - 3x + 2 = 0 .\supset_{\xi}. x = 2 .v. x = 1.$

Funções de verdade de identidades

Deste modo podemos esperar fornecer uma explicação da matemática inferior (i.e., a teoria dos racionais).

Para os irracionais, precisamos da teoria dos agregados no sentido não técnico geral.

Wittgenstein não possui uma teoria da matemática superior, mas eu tentei construir uma de acordo com suas linhas.

Considere, na sequência

matemática inferior

matemática superior

Matemática inferior

Fórmulas e proposições verbais correspondentes

Fórmulas não dizem nada

Fórmulas devem ser elimináveis de proposições reais que aparentemente envolvem fórmulas.

Este é o princípio fundamental de coisas que não podem ser ditas.

$Nc'\varphi\hat{x}^2 = Nc'\psi\hat{x}^3 - 3$?

(∃n, m) : $Nc'\varphi\hat{x} = n.\ Nc'\psi\hat{x} = m.$ $\underline{n^2 = m^3 - 3}$ (não funciona)

Eu defendo que $n^2 = m^3 - 3$, sendo ineliminável, não pode ser uma fórmula mas deve ser uma *tautologia*.

Ela é realmente?

(∃–n, m) : $Nc'\varphi\hat{x} = n.\ Nc'\psi\hat{x} = m$

mas é impossível de lidar deste modo

Mas a matemática inferior pode ser feita como um caso da superior.

Teoria das classes deve ser extensional

(α similar a β,ainda que α, β tenham intensões, R não precisa ter)

A concepção de Wittgenstein da identidade reforça minha ideia de que uma classe não precisa ser definida por uma função proposicional.

Se finita, por que não infinita?

Este erro passaria despercebido, mas para o Axioma da Multiplicação.

Teoria extensional das classes

? Tipos de funções de funções de indivíduos = classes de indivíduos

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

$\alpha = \hat{x}(\varphi x)$é $F(\varphi\hat{x})$.

φ*a* . φ*b* . ~∃xyz φx φy φz.

$\alpha \subset \hat{x}(\varphi x)$. $\hat{x}(\varphi x) \supset \alpha$

Não dá certo α = D'R.

O que sobra:

(1) Teoria intensional Funções de diferentes ordens, Ax. da Redutibilidade

(2) Teoria extensional Classes de identidade, Ax. da Multiplicação

(3) Axioma do infinito

Axioma da redutibilidade ou [ficamos] sem cortes de Dedekind.

2ª parte da teoria dos tipos

Lembre-se de que "elementar" é uma característica não do tipo proposicional mas da instância ou de seu modo de expressão.

? palavra escrita

e.g. (x).φxφ*a*...φ*z*

ou φ*a*φ*a* : (∃x).φx

Lembre-se também de que temos que falar de tipos proposicionais dos quais pode não haver nenhuma instância, *e.g.* (x).φx (não há nomes para todos φ*a*'s).

Apenas fazemos isso quando asserimos alguma função de verdade dessas proposições. Podemos fazer isto sem ter um simbolismo para cada argumento separadamente, já que não precisamos enumerar os argumentos.

Assim como podemos não ter nenhum símbolo para uma proposição devido a não ter nenhum nome, podemos fracassar devido ao fato de não ter, em geral, nenhum aparato simbólico adequado.

No que diz respeito a qualquer conjunto de proposições elementares, seria possível ter uma proposição que manifesta concordância com elas, mas discordância com todas as outras. Embora possamos não ter um aparato para fazer isto, se ela não é uma função de verdade simétrica.

Algumas vezes, porém, podemos ter funções de verdade de proposições que não podemos expressar por falta de aparato (nomes).

Função proposicional de indivíduos (noção geral).

Um símbolo $\Phi(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\ldots)$ que se torna uma proposição pela substituição de $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}\ldots$ por nomes.

Geralmente incompleto, algumas vezes não.

Dois destes símbolos são instâncias da mesma função, se os valores para os mesmos conjuntos de argumentos são sempre as mesmas proposições.

$\varphi\hat{x}$ fornece uma proposição (talvez sem instâncias) para cada indivíduo, de onde (∃x).φx ¬(x). φx (extensão para diversas variáveis)

(∃x).φx,y função de y (agrupa proposições)

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

Em breve funções de funções.

vagueza da extensão (*range*) em

$(\exists\varphi).f(\varphi\hat{x})$.

$(\varphi).f(\varphi\hat{x})$.

Funções de funções: funções de nomes de indivíduos

extensão de argumentos para $\varphi\hat{x}$ objetivamente fixados pela extensão dos objetos.

extensão de argumentos em $f(\varphi\hat{x})$ é uma extensão de símbolos, geralmente incompletos.

O que poderia ser fixado como extensão de símbolos[?]

Dois métodos que eu chamo talvez inapropriadamente de subjetivo e objetivo.

[O] subjetivo é mais natural e é aquele dos *Principia*, a extensão é definida pela maneira de construir os símbolos (melhor função, não símbolo).

Dificuldade em falar de significados de símbolos incompletos.

Todas as funções ≠ todos os símbolos (todos os objetos materiais ≠ todos os símbolos)

o que dizemos sobre funções, porém, deve completá-las. Este requerimento é atendido se usarmos funções predicativas de funções.

Possibilidade de séries formais de símbolos de ordem crescente dando proposições de order ω.

Nos *Principia Mathematica*, apenas ordens finitas.

(podemos falar de todas as ordens finitas, mas não de todas as ordens)

Totalidades ilegítimas

de tipoclasses, números

de ordemsignificado, sentido, contrassenso

Proposições sobre todas as proposições

todas as proposições são verdadeiras ou falsas

ou = (p) p v ~p = T ilimitado

ou sobre símbolos quando limitado

Tradução da identidade

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

Qualquer φ_e particular definida de modo especial (pressupõe seus valores) ou predicativa (pressuposta por seus valores).

Tudo que usamos é a ideia geral de uma φ_e

(φ_e): simboliza de uma nova maneira.

Identidade se torna tautologia ao invés de ser mostrada.

Assim também a ideia do infinito prova sua existência.

∃n φ's pressupõe para sua significação (não para sua verdade) ∃n.

Ela resulta não em proposições filosóficas, mas torna as proposições claras.

i.e., ao estabelecer uma notação que permite ver visivelmente a relação lógica entre elas (quando elas são sobre o mesmo objeto, quando elas contradizem umas às outras).

Isto é alcançado pela análise de seu sentido.

Ele diz que em todo caso uma proposição mostra as propriedades formais de seu sentido, i.e., elas são reproduzidas por propriedades internas *da proposição*.

Mas não do sinal, i.e., as propriedades que o sinal deve ter para ser aquela proposição, mas não ser aquele sinal.

2. 002-27-01 Lógica

I

n proposições atômicas

2^n possibilidades de verdade e falsidade

Na ausência de um conhecimento exato, podemos querer dizer meramente que aquilo que é o caso é uma [possibilidade] de um certo subconjunto destas.

Fornece a notação e a explicação das funções de verdade (diagrama)

Qualquer proposição que não seja atômica expressa, deste modo, concordância e discordância com possibilidades de verdade de proposições atômicas.

[É] claramente o caso daquilo que Russell chama de proposição elementar.

Proposições gerais, variáveis aparentes.

$\varphi\hat{x}$ é uma função que agrupa um conjunto de proposições que são seus valores, no simbolismo empregado, quando x é substituído por qualquer constante.

Fornecer a função é um modo de determinar este conjunto de proposições.

Podemos, então, asserir o produto lógico ou a soma lógica destas proposições.

Estende as funções de verdade a um número infinito de argumentos, se há um tal [número de argumentos].

[É] essencial, ao desenvolver a matemática, aceitar o infinito no início. Esta é a verdadeira chave.

Teorias finitistas

Método uniforme de gerar funções de verdade a partir de p|q = ~p.~q

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

Ideia primitiva (---T)(p,q--)

(---T)($\varphi\hat{x}$)

Deste modo, todas as proposições sem exceção são funções de verdade de proposições atômicas (e emergem da aplicação sucessiva de (--T)ξ); a generalidade é meramente um novo modo de determinar os argumentos diferente da enumeração.

(Também [há] um terceiro modo) Séries formais, *e.g.*, aRb, ∃x.aRx. xRb e assim por diante

Tipos distintos de variáveis aparente correspondem a modos distintos de agrupar argumentos de verdade.

Dentre as 2^{2^n} funções de verdade de *n* argumentos, [há] dois casos extremos:

- concordância com todas possibilidades = tautologia
- concordância com nenhuma possibilidade = contradição

As proposições da lógica são tautologias neste sentido bem definido e não meramente proposições completamente gerais.

Inferência lógica.

p se segue de q, se suas condições de verdade contêm as de q

Então p⊃q é uma tautologia.

Esta é a explicação da implicação estrita

p estritamente implica q = p⊃q é uma tautologia

p. p⊃q :⊃: q é uma tautologia

Portanto, p. p⊃q estritamente implica q.

Quando dois símbolos são a mesma proposição? Quando eles possuem o mesmo sentido

Type-token Sinal / símbolo

De modo mais geral, dois sinais são o mesmo símbolo, se a substituição de um pelo outro não altera o sentido.

O sentido de uma proposição são as possibilidades com as quais ela concorda e com as quais ela discorda.

Portanto, muitas proposições formadas de modo distinto possuem o mesmo sentido.

Em particular, uma tautologia não acrescenta nada ao sentido.

Portanto, dizemos que uma tautologia não diz nada (todas as tautologias são a mesma proposição), mas podemos ter um sentimento de crença voltado a ela.

(A inferência "p implica q" [pode ser feita] se o sentido de q está contido no de p.)

(*Formas normais*: soma de produtos, produtos de somas)

Até agora apenas classificamos sentidos. Temos ainda que tentar a análise de "p" diz p quando ela não é atômica, já que isto está envolvido em "A diz p" (*oratio obliqua*).

Considere o caso mais simples: "~aRb" (como antes, "*a*" é o signi-

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

ficado de *a* etc.)

Que diferença faz o ~?

Será que ele funciona como '~' é o significado de ~? Não, pois ~~p = p, mas então um seria sobre ~, o outro não.

A Edição 1 dos *Principia* é o estudo de ~, v, mas a Edição II, sendo o estudo de | [barra de Sheffer], seria o estudo de algo distinto?

Este é seu *Grundgedanke*.

Como funciona o "~"? Pois podemos usar qualquer marca que quisermos para a negação. Não podemos introduzi-la explicitamente ou nossa análise de "A crê que p" funcionaria apenas para uma notação e seríamos incapazes de lidar com a possibilidade de uma notação desconhecida.

A solução engenhosa de Wittgenstein: em qualquer símbolo, devemos considerar o aspecto significativo.

'the' e "THE' são a mesma palavra

Portanto, o aspecto essencial é comum a ambas

~p, ~~~p são a mesma proposição

Portanto, o aspecto essencial é comum a ambas

i.e., [este aspecto] não é o ~, mas que a proposição seja uma do conjunto ~p, ~~~p, ~(p v p), ~p.~p *ad inf.* construída de acordo com uma certa regra.

Este é o aspecto essencial.

Agora, em qualquer outra notação haverá uma regra deste tipo, *e.g.*, uma que diz que xp, xxxp... são construídas.

Esta estará em correspondência (projetiva) com a outra regra, no sentido em que há uma relação 1-1 *formal* (i.e., não apenas 2 α_0's) entre os conjuntos de símbolos construídos de acordo com as duas regras.

Não há uma tal relação entre símbolos para p e ~p
p.p ~p.~p
~~p ~~~p
mas? ~(p v p)

Aqui a análise de "A crê que *a*R*b*" é "Há na mente de A nomes para *a*, R, *b*, agrupados em um símbolo cujo aspecto significativo consiste em ele ser construído de acordo com uma regra que é tal que os símbolos construídos por ela correspondem formalmente a ~p, [~]~~p, etc."

Esta não é uma solução completamente satisfatória, mas talvez possa ser o melhor que pode ser feito.

Nota[s]:

(a) aspecto significativo. Isto deve ser colocado em "construído de acordo com"; não funcionaria sozinho, já que ~~*a*R*b* seria construído de acordo com uma tal regra (~~) para ~, mas deve ser esta regra que aquele que pensa está usando. Aspecto significativo deve ser explica-

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

do psicologicamente.

(b) Regra e séries formais devem ser melhor explicadas. Uma proposição que contém uma regra variável, i.e., uma série formal variável é de tipo superior; i.e., uma função de verdade de proposições elementares agrupadas de uma nova maneira.

Novamente o “não”

Colocar [o sinal proposicional] de cabeça para baixo; reformular em termos de operações.

Mesmo assim não vai funcionar.

p|q ~p , p v q notações

p v q = (p|p)|(q|q) = ~p | ~q = ~~p .v. ~~q

Possuem multiplicidades diferentes.

Alguma coisa deste tipo, porém, deve ser verdadeira. Na notação, algo é arbitrário, mas não tudo, devemos ter um grupo de operações de um certo tipo ou uma certa espécie de tipo.

Além destas, temos proposições atômicas.

Outras proposições resultam a partir de proposições atômicas por meio de operações; temos uma posição definida no grupo. E é de sua posição no grupo que depende a significatividade.

p, ~p não em um par

se p é atômica, ~p não é atômica

Alguma explicação deve começar com o significado de palavras. Portanto, o significado de proposições depende destes.

Se a significatividade de ~ não é o resultado de uma relação com um objeto externo, ela deve resultar de propriedades necessárias da notação, não de suas propriedades convencionais. A investigação destas [propriedades] é presumivelmente o objeto da teoria geral de Sheffer da relatividade notacional, da qual eu gostaria de saber mais.

Esta [é] então a explicação para ~, de modo similar para v etc.

Variáveis aparentes são um aparato mais complicado; o pouco a dizer a respeito delas será dito posteriormente.

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

Reflexões sobre a Teoria

Todas as proposições são funções de verdade de proposições atômicas.

Definição de função de verdade: P é dita ser uma certa função de verdade de p, q, r, ... se seu valor de verdade é logicamente determinado pelos de p, q, ... de uma certa maneira.

Pressuposições proposições atômicas
objetos simples

Pressupor estas coisas é, como ele diz, pressupor o caráter determinado do sentido, [é pressupor] que a análise deve ter um fim. Se não [houvesse o] simples, nenhuma figuração poderia ser feita que não pudesse ser um contrassenso.

Teoria da generalidade

$(x).\varphi x$ = $\varphi a.\varphi b...$

não elementar — elementar

$(x).\varphi x$ significa de uma nova maneira (novas regras envolvidas); proposição elementar / palavra falada.

Críticas:

1. φa não pode ser parte de $(x).\varphi x$ já que eu posso não ter ouvido falar de *a*.

Resposta: $(x).\varphi x$ é útil precisamente por que é mais fácil julgar sobre aquilo de que não temos conhecimento direto.

N. B. "Sócrates é mortal" não é parte de "Todos os homens são mortais", i.e. ψa não [é parte] de $(x).\varphi x \supset \psi x$, mas $\varphi a \supset \psi a$ é.

Todos devemos concordar que, ao dizer "Todos os homens são mortais", comprometemo-nos também com [a verdade de] "Se Sócrates é homem, Sócrates é mortal".

2. I — II

$(x).\varphi x$ não é $\varphi a.\varphi b...\varphi z$, pois II não fornece I sem [o acréscimo de que] *a*, *b*, ... *z* são todos.

Mas "*a*, *b*, ... *z* são todos" é considerado como um contrassenso.

Negue-a: $(\exists x).x \neq a \,.\, x \neq b \,.\, x \neq z$.

Veremos que isto é um contrassenso quando chegarmos à identidade.

Esta teoria da generalidade está vinculada:

1. à teoria da identidade
2. à teoria segundo a qual "*a* existe" é um contrassenso, i.e., não podemos perguntar ou considerar que coisas existem, mas apenas que coisas existem de um certo tipo.
3. à teoria de que objetos existem necessariamente, e não podem ser suprimidos, e poderíamos apenas mudar o mundo alterando os fatos. Poderíamos ter não φa, mas $\sim\varphi a$, mas [não poderíamos] não ter absolutamente nenhum *a.*

Estas doutrinas são articuladas e é difícil rejeitar uma sem [rejeitar as] outras.

N. B. (1), (2) dizem que certos conjuntos de palavras [são um] contrassenso

(3) é místico e, ainda que útil, pode ser omitido.

O fato de que as coisas no mundo são *a*, *b* ... *z* é um fato místico. Assim como é o fato de que *a* existe. Nenhum deles pode ser asserido, mas pode ser mostrado na linguagem pela existência do nome "*a*" e pelo fato de (x).φx equivaler a φ*a*....φ*z*.

Esta é a primeira instância do místico a que devemos passar.

A propósito, Russell encontra uma dificuldade quando Wittgenstein permite uma totalidade de valores de $\varphi\hat{x}$, mas chama a totalidade de valores x de mística.

(Wittgenstein não diz, apenas diz possivelmente "Todos os S são P")

Este é um erro. Ele diz que o sentimento do mundo como uma totalidade limitada é o místico. Ênfase no "limitada".

(N. B. uma enumeração é uma variável, não uma classe para este propósito;   φx / x permitida enquanto variáveis, não enquanto classes)

i.e. falar sobre a totalidade de x como uma classe (não como uma variável), *e.g.* $\hat{x}(\varphi x)$ não é permitido. Mas podemos usar a totalidade, assim como não podemos falar sobre *a* mas podemos usá-lo.

variável – todos de uma certa forma

classe – todos de um certo tipo

A teoria da generalidade de Wittgenstein é um pouco paradoxal

Que outra teoria [é] possível [?]

Teoria dos universais

(x).φx assere a universalidade da φ-dade (forma sujeito-predicado)

2 dificuldades:

1. Recupera constantes lógicas

~(∃x).~φx = (x).φx

Uma nega a existência da não φ-dade, a outra assere a universalidade da φ-dade

Portanto, são diferentes, já que tratam de coisas diferentes.

2. Qual é a conexão entre "φ-dade é universal" e "φ*a*"

Na teoria de Wittgenstein uma é parte da outra, mas não nesta [teoria].

Esta [teoria] envolve novas relações lógicas – implicação estrita

"φ-dade é universal" implica "φ*a*"

Como analisar isto[?]

Se proposições não são nomes

Diferença de p⊃q (⊃ não é uma relação) (forma fundamental, veja acima).

(p implica q, na teoria de Wittgenstein, é uma pseudoproposição. Veja abaixo, mas esta explicação não estará mais aberta [para esta teoria]).

3. Qual é a conexão entre

φ*b* quando φ é uma abreviação para *a*R

*a*R*b* pois uma trata de φ, a outra de *a*, R

(Evidentemente elas são a mesma [proposição])

Impossível de tratar definições

(φ*b* trata de φ, não de *a*, R, portanto de (∃x).φx = φ possui existência

1. 004-03-01 Esboço sobre lógica

Esboço

Uma proposição expressa concordância e discordância com possibilidades de verdade de proposições atômicas. Proposições atômicas asserem fatos atômicos, i.e., a conexão de objetos. Objetos supostamente pertencem a tipos, e possuem, no sentido de Wittgenstein, a mesma forma (possibilidade de ocorrência em fatos atômicos). Temos, na teoria, uma forma padrão para qualquer proposição, que mostra com quais possibilidades de verdade a proposição concorda. A fim expressar todas as proposições na forma padrão, precisaríamos de nomes para tudo, os quais não temos. Consequentemente, usamos a lógica (matemática). A lógica consiste de:

(1) mecanismos para a expressão sistemática de proposições usando um mínimo de nomes ou, de modo mais geral, símbolos constantes.

(2) fórmulas que facilitam a percepção de quando uma proposição está contida na outra, de modo a ser permitida a inferência de uma a partir da outra.

Observação para (1). Não podemos realmente inventar novos mecanismos que nos possibilitam expressar proposições que não poderíamos expressar na linguagem ordinária, pois temos de pensar e de explicar nossos mecanismos em termos da linguagem ordinária. Podemos apenas sistematizar, entender e aperfeiçoar a lógica da linguagem ordinária humana.

Observação para (2). A natureza destas fórmulas não podem ser determinadas *a priori*. O tipo mais familiar de fórmula para o propósito em questão é a forma tautológica "φ(x,y,z,...) .⊃. ψ(x,y,z,...)", a qual permite inferir 'ψ(*a*,*b*,*c*,...)' de 'φ(*a*,*b*,*c*,...)'. Não há razão, porém, por que não deva haver outras formas, *e.g.*, a identidade "*a*=*b*", que mostra que "*a*" pode ser corretamente substituído por "*b*" em qualquer proposição.

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

(1).

O primeiro mecanismo para expressar proposições é a aplicação de funções de verdade a proposições atômicas. Uma proposição expressa deste modo será chamada de elementar. "Elementar" caracteriza, portanto, não a proposição (o sentido), mas o modo pela qual ela é expressa (sinal).

O segundo mecanismo é o uso da generalidade. (∃x).φx é a soma lógica de todas as proposições φx para valores distintos de x; é essencial que esta coleção seja uma coleção determinada de proposições. Se φx é significativa quando x é um objeto, não há dificuldades, pois os valores de x são todos os objetos de um certo tipo.

Chamamos de função proposicional um símbolo $\varphi\hat{x}$ que representa diferentes proposições para valores distintos de x. Ele é determinado por meio da fixação de quais proposições ele representa para cada valor de x.

A dificuldade ocorre quando falamos de "todas as funções", como em (∃φ).f($\varphi\hat{x}$), a soma lógica das proposições f($\phi\hat{x}$) para valores distintos de $\varphi\hat{x}$. Temos que determinar um conjunto determinado de funções $\varphi\hat{x}$. Vamos considerar os diferentes tipos de funções.

Em primeiro lugar, há funções atômicas: em qualquer proposição atômica em que *a* ocorre, substituímos *a* por x em uma ou mais (se possível) de suas ocorrências na proposição atômica. Obtemos, então, uma função atômica $\varphi\hat{x}$, cujos valores são proposições atômicas.

Em seguida, há funções predicativas; estas são funções de verdade de funções atômicas e proposições atômicas, tais como "p .v. φx : fx", em que "p" é uma proposição atômica, e $\varphi\hat{x}$, $f\hat{x}$ são funções atômicas. Aqui surge a primeira dúvida concreta: estamos limitando-as a tais funções de verdade de um número finito de argumentos? Este é (com efeito) o procedimento adotado nos PM, e torna necessário o Axioma da Redutibilidade, no qual não há razões para acreditar. Não vejo vantagem neste procedimento. Proponho incluir, como funções elementares, funções de verdade de qualquer número de argumentos, finito ou infinito. Será objetado que uma função de verdade com um número infinito de argumentos é um contrassenso; isto é incorreto, pois a ideia de uma função de verdade é a concordância e discordância com possibilidades que podem muito bem ser infinitas em número. E é claro que, na minha concepção, temos um agrupamento determinado de funções predicativas, a saber, as expressões de concordância e discordância com qualquer conjunto de possibilidades de verdade de proposições e funções atômicas.

Consequentemente,

(φ). φ*a* ⊃ φ*b* é uma proposição determinada; $\varphi\hat{x}$ toma, como valores, todas as funções predicativas.

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

E, além disso,

(φ).$\varphi\hat{x} \supset \varphi b$ é uma função proposicional de x, pois ela representa uma proposição para cada valor de x e é uma função predicativa de φx ⊃ φ*b* para distintos valores de φx que são, eles próprios, funções de verdade de proposições e funções atômicas. Portanto, ela é uma função de verdade de proposições e funções atômicas.

Esta ideia de proposições predicativas deve ser legítima, pois ela fornece um conjunto determinado de funções.

Podemos não ter símbolos para todos esses valores para ϕx, mas tampouco temos símbolos para todos os valores de $\varphi\hat{x}$, pois não temos nomes para todos objetos.

Além disso, se adotarmos essa ideia, podemos nos livrar da necessidade do Axioma da Redutibilidade, que diz que, para qualquer função obtida por generalização, há uma função equivalente predicativa no sentido dos PM, o que pode muito bem ser falso e certamente não é uma tautologia. Vemos que, no sentido em que adotamos, todas as funções em questão são funções predicativas.

φx é uma proposição predicativa se φ*a* diz algo sobre *a*, φ*b* diz algo sobre *b*.

Em seguida, temos funções predicativas de funções (predicativas) de objetos, que são funções de verdade de proposições atômicas e funções atômicas de funções. Uma função atômica de uma função $\varphi\hat{x}$ é ϕa.

(funções de funções e assim por diante [são] extensionais; lidar com as epistêmicas)

Vemos que, por generalização, nunca ganhamos nada além de funções predicativas.

Agora, temos que lidar com as contradições que parecem requerer uma divisão de funções de objetos.

Elas não são puramente lógicas, mas todas fazem referência à simbolização, *e.g.*, heterológico. Elas são solucionadas pela distinção dos modos em que as funções simbolizam. Assim como falamos de uma proposição elementar, i.e., de uma proposição simbolizada de modo elementar, podemos falar de uma função elementar, i.e., de uma [função] simbolizada de modo elementar, i.e., de uma [função] cujos valores são proposições elementares.

Em “um adjetivo que é o que ele significa”, devemos torná-la precisa; se nós tomamos como significando de modo elementar, a frase toda não significa de modo elementar e não há contradição. Similarmente para qualquer outra ordem.

Isso fornece tudo dos PM e remove o Axioma da Redutibilidade, mas se trata ainda de uma base insuficiente, pois ela não fornece todas as proposições que podemos expressar sem todos os nomes, *e.g.*, “há um x distinto de *a* tal que φx”. Há duas coisas tais que φx.

PM fornece uma definição equivocada da identidade. Evidentemente, x = y não é uma função predicativa; assim, para dar conta dela precisamos de um novo aparato.

A. Uma ideia é estender a noção de uma função para além de funções predicativas.

Ou pela introdução *ad hoc* de x = y como tautologias, ou pela introdução de funções em geral, i.e., correlações entre objetos e proposições não necessariamente predicativa.

B. A outra [ideia] é adotar a ideia de Wittgenstein.

A.

Pode ser feita de duas maneiras, *ad hoc* ou geral.

Elas resultam no mesmo já que, introduzindo x=y, chegamos, por meio de funções de verdade desta, à ideia mais geral possível de função proposicional, a saber, qualquer relação um-para-muitos entre proposições e argumentos.

Pois podemos definir φx de tal modo a obter φ*a* = p; φ*b* = q ...

Portanto, φx :=: x=*a*.p .v. x=*b*.q .v. …

[A maneira] mais simples é tomar esta ideia de funções proposicionais generalizadas como indefinível e definir (agora de maneira legítima) x = y :=: (φ) φx ≡ φy.

Isto justifica tudo dos PM, teoria das classes, etc.

Esta ideia é correta?

Podemos argumentar que funções proposicionais não tem a amplitude necessária, pois “algo distinto de x, y satisfaz $\varphi\hat{z}$” parece uma função proposicional, mas pode-se facilmente mostrar que ela não é predicativa. (Se ela fosse predicativa, poderíamos mostrar a identidade de indiscerníveis).

i.e., (*a*) : (∃φ). φx ≡. x = *a*.

Prova: seja f*a*, caso contrário tome ~f*a*.

Considere α = $\hat{x}(f\hat{x})$

Seja α (*a*) = β.

Então φx = “Não há nada que satisfaz $f\hat{x}$ exceto x e os membros de β”.

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

A noção generalizada escapa de contradições assim como a específica, pois um símbolo que usa “todas as funções generalizadas” simboliza de um modo distinto.

Embora ela não forneça a ideia correta para “todas as propriedades”, ela o faz para “todas as classes”, então parece que é preciso de ambas na lógica.

Podemos aplicar qualquer arranjo de [funções] generalizadas e específicas para tipos distintos. *e.g.* φx a ser generalizada, $f(\varphi\hat{x})$ predicativa.

Críticas [que podem ser feita são i)] que se considera como primitiva a ideia bastante complicada de uma relação um-para-muitos entre proposições e objetos e [ii)] que ela arrasta todas estas relações para o interior da análise da simples proposição (x): φx ⊃ x=*a*.

Note que x=y é então uma tautologia se "x" e "y" possuem o mesmo significado, caso contrário [ela é] uma contradição. Ela deve ser uma proposição determinada, i.e. função de verdade de proposições atômicas e ela é claramente ou tautológica ou contraditória. Se a introduzimos pela maneira específica, devemos dar esta explicação dela.

Isto torna clara a diferença em relação a Frege. Para ele, "p" significa verdade ou falsidade; para nós, um estado de coisas possível e nossa técnica de definição, por conseguinte, varia.

Mas, assim como a sua, esta concepção pode ser acusada de confundir argumento de uma função com um índice de um nome.

Pois, digamos, se "φ Sócrates" = Platão é sábio
"φ Cícero" = Demóstenes é um orador

não precisamos entender "φ" para entender "φ Sócrates"; na verdade, ocorre precisamente o contrário. (Esta também é a concepção de Russell nos PM).

($\varphi\hat{x}$ não é provavelmente um constituinte de φ*a*. Portanto, não chamamos tais funções de predicativas. É claro que funções de funções generalizadas não precisam ser extensionais)

Mas há casos limites, *e.g.* φ(x,y) = (z):fz .⊃. z=x v z=y ou mesmo x=y.

Funções como o caso acima de "φ Sócrates" ocorrem apenas como instâncias de todas as funções [generalizadas].

Este desenvolvimento da noção de função é como seu desenvolvimento na matemática: de uma função dada por uma fórmula algébrica para uma prescrita de alguma maneira de modo que y = fx meramente expressa uma definição, [não manifestando] nem mesmo aparentemente nenhuma conexão entre x e y.

Aqui, novamente, há casos limites como $(-1)^n$.

Em **A.** a matemática consiste claramente de tautologias.

B.

A convenção de Wittgenstein é ambígua.

(1) convenção real (a) significado
(b) letra (i.e., sobre a identidade)

(a) impossível para o cálculo simbólico

(b) terrível para definições, fornece funções não predicativas

fx = (∃y) : fy Tx T*a*.

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

do tipo que, como provamos, torna isto tudo desnecessário (se estendidas a funções de verdade infinitas)

(2) Novas ideias primitivas ou, melhor, mecanismos além da generalidade ordinária

$(\exists x, y) : \varphi x,y = (\exists x) : (\exists y)\ y \neq x\ \varphi x,y$

realmente [o que ocorre] é a substituição da identidade pela ideia de número. Não fornece nenhuma função não predicativa.

Regras de tradução a serem estabelecidas.

? Tentativa de se estabelecer a convenção com identidade apenas entre variáveis.

(2) fornece todas as proposições exceto:

(α) Aquelas que envolvem relações de ancestralidade "bR*a"

(β) Aquelas que envolvem a variável número "O número de φs é par"

(γ) Aquelas que envolvem a variável classe ou relação (incluindo números transfinitos), *e.g.* "φ, ψ possuem o mesmo cardinal".

A construção ordinária da matemática inclui (α), (β) em (γ); mas talvez elas sejam mais fáceis de lidar sozinhas. Se isto for provado ser o caso, poderíamos ter uma matemática elementar ou uma álgebra baseada no princípio da indução matemática independentemente da matemática superior ou análise baseada na teoria das classes e em cortes de Dedekind.

Para dar conta de (α), (β) (nenhuma das duas é redutível à outra), devemos ter a ideia de séries formais e a de operação.

Não é preciso discutir a questão bastante difícil do escopo da noção de operação.

[série *a*, ξ, Ω' ξ] *e.g.* como em ~p, ~~p, operações distintas, = como sinal de substituibilidade / limitação da aplicabilidade.

Pois nós precisamos apenas de duas operações particulares:

(α) $\Omega' \{ (\exists x) .\ \beta R b \} = (\exists \alpha, \xi) : \beta R \xi\ .\ \xi R b$

(β) $\Omega' \{ (\exists \alpha, x)\ \beta\ .\ \varphi x \} = (\exists \alpha, x, y) : \beta\ .\ \varphi x\ .\ \varphi y$

Números são índices de operações.

Podemos definir a adição, a multiplicação e a exponenciação facilmente

$\Omega^{m+n}\ \xi = \Omega^m\ \Omega^n\ \xi$ ou $m+n = (\Psi')^n\ m$

$\Omega^{mn}\ \xi = (\Omega^m)^n\ \xi$

ou $m \times n = (+m)^n\ .\ 0$

e $m^n = (\times m)^n\ .\ 1$.

Cf. as definições indutivas de Peano.

Agora será preciso ver se temos aqui um aparato suficiente para

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

expressar todas as proposições que podemos expressar na linguagem ordinária com o auxílio da matemática elementar.

A proposição geral sobre o número de coisas que satisfazem uma função predicativa é que este número é um de uma certa classe de números; [a proposição geral] sobre o número para duas funções [é] que estão em par em uma certa relação em extensão de números. Nem todas as 2^{X_0} classes e relações precisam ser, é claro, consideradas, mas apenas aquelas que podem ser definidas elementariamente. Algumas delas podem ser facilmente expressas.

e.g.

N’φ é ímpar = ~:(∃n) . N’φ = 2n.

N’φ é primo = ~:(∃m)(∃n) . N’φ = mn.

N’φ ≥ N’ψ = (∃m):(∃n) . N’ψ = n . N’φ = n+m.

Mas uma dificuldade surge assim que chegamos a uma equação.

e.g. $N'\varphi^2 - 3N'\varphi + 2 = 0$

Isto pode ser expresso (em virtude de nosso conhecimento matemático) como N’φ = 2 .v. N’φ = 1

e N’φ + N’ψ = 3 como N’φ = 0 . N’ψ = 3 .v. N’φ = 1 . N’ψ = 2 .v. v.

mas $N'\varphi + 3 = (N'\psi)^2$ claramente requer alguma ideia nova.

Gostaríamos de escrevê-la assim: (∃n): $N'\psi = n^2$. $N'\varphi = n^2 - 3$

mas isto envolve uma definição de “-”, a qual não é fácil fornecer. Obviamente ela deve ser definida por referência à adição; mas como?

m - n é o número que adicionado a n fornece m, i.e., m – n = (ıx)(x+n = m)

mas x+n = m não é uma função predicativa, pois seus valores não são proposições reais, mas proposições matemáticas.

Todavia parece que não podemos expressar estas proposições ordinárias a não ser introduzindo nelas proposições matemáticas cuja natureza é ainda misteriosa.

e.g. O número de φ’s é 3 a menos que o quadrado do número de ψ’s = (∃n, m): $n+3 = m^2$. N’φ = n . N’ψ = m.

Devemos agora discutir a natureza das proposições matemáticas.

Temos que considerar, agora, o que acontece com a matemática nesta concepção dos números. Considere, por exemplo, uma identidade da forma m = n + p. Não fornecemos ainda nenhuma explicação desta [identidade], pois ela não é uma proposição. Se, para m, n ou p, substituímos Nc’ $\hat{x}\varphi x$, devemos ter uma proposição da qual é fácil fornecer uma explicação de acordo com o que foi dito acima.

Mas m = n+p não faz referência a fatos atômicos, ela é correta ou errada *a priori* e, portanto, não pode ser uma proposição real. Uma maneira óbvia de tentar solucionar a dificuldade é torná-la uma tautologia ou uma contradição, já que estas são corretas e erradas *a priori*, e ligá-las a proposições tais como Nc'$\hat{x}\varphi x$= n, as quais nós já discutimos. O modo mais simples é torná-la

Nc'$\hat{x}\varphi x$= m $\supset_{\varphi}$ Nc'$\hat{x}\varphi x$= n+p. (1)

O problema, porém, é que, se [a identidade] m = n + p [valesse], (1) seria uma tautologia, [mas], no caso oposto, (1) não seria uma contradição, mas uma proposição significativa. Pois, não importam quais sejam n e p, ela é verdadeira se ~∃φ . Nc'$\hat{x}\varphi x$= m, o que pode (até onde sabemos em matemática) ser o caso, e ela certamente não é autocontraditória.

Então deveríamos dizer que 2+2=4 é uma tautologia, mas 2+2=5 uma proposição significativa cuja verdade não pode ser determinada *a priori*!

Claramente nos equivocamos a respeito do nível de m = n+q, que é equivalente a "que (1) é uma tautologia" ao invés de ser ela própria (1).

Então, temos que refazer nossos passos e considerar de novo a natureza e o propósito da matemática.

Seu propósito é facilitar inferências por meio da construção de fórmulas que mostram se [uma] inferência é permitida.

Consequentemente, a partir de m = n+p nós vemos que podemos inferir de $Nc'\hat{x}\varphi x.\psi x = n$, $Nc'\hat{x}\varphi x.{\sim}\psi x = p$que $Nc'\hat{x}\varphi x = m$.

Ordinariamente utilizamos, para este propósito, a tautologia

(φ, ψ) : $Nc'\hat{x}\varphi x.\psi x = n.Nc'\hat{x}\varphi x.{\sim}\psi x = p.\supset. Nc'\hat{x}\varphi x = m$.

Mas acabamos de ver que ela não é um equivalente adequado para p+n = m já que, então, m+n = p, m+n = p+1 seriam logicamente compatíveis; se uma fosse uma tautologia a outra não seria uma contradição.

Concluímos, então, que m = n+p é uma fórmula que não é uma tautologia, mas facilita a inferência de outro modo. E podemos estender razoavelmente esta conclusão para todas as "proposições" da matemática elementar das quais m = n+p pode ser tomada como emblemática. Devemos agora tentar determinar a natureza destas "proposições".

Devemos apenas observar o fato notável de que, assim como proposições ordinárias são verdadeiras ou falsas, "proposições" matemáticas são "corretas" ou "erradas" (reserve V, F para proposições reais) e podem estar sujeitas a operações de todo modo análogas a operações de verdade; *e.g.* podemos aplicar "ou isto ou aquilo" a proposições matemáticas.

Iremos chamar, daqui pra frente, as "proposições" matemáticas e outras "proposições" deste tipo de *fórmulas*, e funções cujos valores são fórmulas serão chamadas de *funções formais*, em oposição a *fun-*

ções proposicionais cujos valores são proposições.

Aqui, “função proposicional” é mais abrangente que “função predicativa” já que funções predicativas tomam, como argumentos, apenas objetos ou outras funções predicativas, mas aqui queremos considerar funções de qualquer coisa, *e.g.* de números. Qualquer que seja a expressão, ela pode se tornar um argumento de uma função proposicional, já que ela pode ocorrer em uma proposição real; *e.g.* “Há *n* ovelhas neste campo, e *n* é um número primo = função (função proposicional / função formal).

(Todas as funções da física são proposicionais, não formais, *e.g.* “o valor de g_{mv} ut x = ..”)

Claramente ambas as funções – formais e proposicionais – definem classes.

Funções formais como fórmulas são sujeitas a funções de verdade (formais); daí se segue que qualquer classe é definida por uma função formal. A fórmula $x = a$ é uma função formal, e qualquer classe pode ser definida por uma função da forma $x=a$ .v. $x=b$ .v. …

Mas, é claro, nem toda classe precisa ser definida por uma função real.

Além disso, quaisquer duas funções formais que definem a mesma classe são idênticas, no sentido em que uma pode ser substituída pela outra em qualquer proposição sem alterar o sentido (não apenas a verdade) da proposição. Portanto temos um correspondência completa entre funções formais e classes.

Talvez isto conduziu os matemáticos, que lidam com funções formais e não proposicionais, a adotar uma concepção extensional da lógica.

Encontramo-nos, acima, em uma situação de incapacidade a fim de expressar a simples proposição $N'\varphi = N'\psi'^2 - 3$ exceto como $\exists m\, \exists n\ .\ N'\varphi = n\ .\ N'\psi = m\ .\ n = m^2 - 3$, i.e., sem introduzir a função formal $n = m^2 - 3$.

De modo que não podemos prosseguir sem uma discussão geral de funções formais e de suas ocorrências em proposições, ou, portanto, de classes e suas ocorrências em proposições. Isto é o mesmo que dizer que não podemos lidar, como esperávamos, com (α), (β) acima sem abordar a questão geral (γ).

Temos, portanto, que encontrar uma teoria das classes ou lógica extensional, e podemos repetir que tal teoria é exigida já que, de outro modo (se rejeitarmos o mecanismo das funções proposicionais generalizadas), não podemos expressar proposições tais como “$\varphi\hat{x}$ tem o mesmo cardinal que $\psi\hat{x}$”

Um ponto importante é que, como há proposições que não podem

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

ser expressas sem fórmulas, a teoria das fórmulas não pode ser meramente Hilbertiana.

(? define a aplicação de funções de verdade a fórmulas; “p|q” está correto definindo-a como ou “p” ou “q” é errada; problema com variáveis já que fornece totalidades subjetivas de símbolos).

2. 006-01-01 Os fundamentos da matemática

Os fundamentos da matemática

O objeto deste artigo é uma nova discussão dos problemas tratados nos capítulos segundo e terceiro da introdução dos *Principia Mathematica*. Sugere-se que os óbvios defeitos desta obra podem ser removidos levando-se em conta as novas teorias lógicas de Ludwig Wittgenstein.

(1). Introdução

A primeira tarefa na discussão dos fundamentos da matemática (pura) é tornar precisa a distinção entre matemática e as outras ciências, tarefa que é surpreendentemente negligenciada nos *Principia Mathematica*. Devemos naturalmente esperar que a distinção seja de assunto; por exemplo, costuma-se dizer que a matemática é a ciência do número e da quantidade. Mas, em vista das extensões modernas da matemática (*e.g.* a teoria dos agregados), tal distinção não pode mais ser sustentada, sendo geralmente substituída pela concepção anunciada explicitamente por Russell nos *Principles of Mathematics*. “A matemática pura é a classe de proposições da forma ‘p implica q’, em que p e q são proposições que contêm uma ou mais variáveis, as mesmas nas duas proposições, e nem p nem q contém nenhuma constante a não ser constantes lógicas”. Outro modo de delimitar este conjunto de proposições é dizer que elas são as proposições completamente gerais, nas quais nada é mencionado pelo nome.

É certo, porém, que esta concepção é equivocada e que nem todas as proposições deste tipo pertencem à matemática. Considere, por exemplo, “Duas coisas quaisquer diferem em ao menos trinta maneiras”. Ela é absolutamente geral, e pode ser expressa como uma implicação inteiramente em termos de constantes lógicas, e pode muito bem ser verdadeira. Provavelmente, porém, ela não poderia ser considerada como uma verdade *matemática* como “2+2=4”; aquela é um mero fato ou acidente, este é uma necessidade formal. É possível que prefiramos dizer que “quaisquer duas coisas diferem em 30 maneiras” é uma generalização notável, mas “quaisquer duas coisas fazem com

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

quaisquer duas outras coisas quatro coisas" é uma mera tautologia; mas o fato de haver uma diferença essencial entre ambas as proposições é inegável. E uma vez que tenhamos visto esta diferença, devemos admitir que a matemática se ocupa não com generalizações acidentais, mas apenas com generalizações necessárias, e que nosso primeiro problema é analisar esta característica essencial de nossa ciência, qual seja, que suas proposições não expressam questões de fato, mas necessidades ou tautologias. (Cf. Russell, Introduction to Mathematical Philosophy).

Esta análise foi conduzida pelo Sr. Witgenstein e talvez seja útil fornecer um esboço de seu trabalho.

(Apêndice) Devemos começar com sua teoria das proposições em geral, isto é, com a análise lógica do juízo, a mesma para a qual o Sr. Russell forneceu, em ocasiões distintas, várias explicações divergentes. Podemos relembrar, primeiramente, sua teoria nos *Principles of Mathematics*, de acordo com a qual a mente, em um juízo, encontra-se relacionada com um objeto não-mental independente, chamado de proposição. Nos *Principia Mathematica*, esta concepção foi abandonada e foi defendida a concepção segundo a qual um juízo não possui um único objeto, mas muitos com os quais a mente está multiplamente relacionada; uma proposição "p" é, então, um símbolo incompleto que não sobrevive à análise de "A crê que p", no qual "p" não ocorre como uma entidade genuína, mas apenas seus constituintes. Esta explicação, por sua vez, foi abandonada no livro "*Analysis of Mind*" do Sr. Russell em benefício de uma explicação muito similar à de Wittgenstein.

Wittgenstein usa a palavra "proposição" não como ela é usada nos *Principles of Mathematics* para designar uma unidade não-mental, mas quase como um equivalente de "sentença". A diferença entre uma sentença e uma proposição é que, enquanto o termo "sentença" naturalmente indica um *objeto*, Wittgenstein usa o termo "proposição" para indicar um *fato*. Esta distinção entre objetos e fatos é de extrema importância; um fato é qualquer coisa que poderia ser expressa por uma frase que começa com "O fato que – " ou asserido em uma proposição verdadeira; por exemplo, "Sócrates é sábio". Contudo, um objeto como Sócrates[4] não pode ser asserido, mas apenas nomeado. Por outro lado, um fato não pode ser nomeado, mas apenas asserido; e em qualquer proposição sobre um fato, o símbolo para o fato é um símbolo incompleto e não o próprio fato, mas apenas seus constituintes são constituintes da proposição. Isso porque uma proposição sobre "o fato que S é P" deve ter um sentido determinado indepen-

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

4 N. B. "Sócrates" é, na verdade, um símbolo incompleto e não o nome de um objeto, mas este ponto deve ser desconsiderado para se entender o exemplo.

dentemente de S ser ou não ser, de fato, P, e, considerando o caso em que S não é P, [i.e.] quando não há o fato de que S é P, podemos ver que este fato não pode ser um constituinte genuíno da proposição.

Consequentemente, enquanto uma sentença é uma lista de palavras do mesmo tipo lógico que as palavras das quais ela é composta, a proposição é um fato, o fato de que as palavras estão combinadas ou articuladas de um certo modo. A proposição tem um *sentido*, ela diz que algo é o caso; e o sentido da proposição resulta do significado independente das palavras nela contidas. Isto pode ser visto a partir do fato de que podemos entender uma nova proposição se entendemos as palavras que são nela usadas. Duas proposições contraditórias estão correlacionadas com o mesmo fato, uma representando-o verdadeiramente, a outra falsamente, e possuem sentidos opostos, dos quais apenas um pode concordar com o fato.

Wittgenstein considera a proposição verbal como emblemática do pensamento em geral. Em todo juízo temos palavras, imagens ou outros elementos mentais que estão agrupados; estes elementos significam, separadamente, os objetos do juízo; e o fato de que os elementos mentais estão agrupados de uma certa maneira significa que os objetos estão agrupados de uma certa maneira. Sua análise lógica de "A crê que p" é "Há na mente de A uma proposição 'p' cujo sentido é p" ou, analisando ainda mais "Há, na mente de A, conectados de uma certa maneira, nomes dos constituintes de p".

Devemos agora fazer uma pausa para tocar em uma questão de nomenclatura; iremos introduzir duas palavras em referência à obra de C. S. Peirce. Ele chama uma palavra, no sentido em que há uma dúzia de palavras 'que' em uma página, de *token*; e estes doze *tokens* são todos instâncias de um *type*, a palavra "que". Além de "palavra", há muitas outras palavras que possuem essa ambiguidade de *type*-*token*; assim uma sensação, um pensamento, uma emoção ou uma ideia pode ser ou um *type* ou um *token*. E, de acordo com o uso de Wittgenstein, e em contraste, p. ex., com o Sr. Russell nos "*Principles of Mathematics*", "proposição" também tem uma ambiguidade *type-token*.

Um *sinal proposicional* é o mesmo que uma sentença exceto pelo fato de que ele não é um objeto mas um fato (cf. acima). Portanto, assim como "sentença", "sinal proposicional" tem uma ambiguidade *type-token*; os *tokens* são agrupados em *types* por similaridade física (e por convenções que associam certos sons a certas formas), assim como há instâncias de uma palavra. Uma *proposição*, porém, é um *type* cujas instâncias são todos os *tokens* de sinais proposicionais que possuem em comum não uma certa aparência, mas um certo *sentido*. Para qualquer sentido existe *a* proposição (*type*) que tem aquele sen-

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

tido, mesmo se não existe nenhum *token* deste *type*.

(Ch I) Para entender a explicação altamente original e importante do sentido de proposições de Wittgenstein, temos de introduzir a noção de *fato atômico*. Tal fato consiste na conexão de objetos simples; por exemplo, o fato de que um indivíduo simples possui uma qualidade simples seria um fato atômico. Se, por outro lado, o indivíduo não tivesse a qualidade, isto seria o que podemos chamar de um fato negativo simples, o que é equivalente à não existência de um fato atômico.

Um fato atômico pode ser asserido por aquilo que chamaremos de uma *proposição atômica* (a "proposição elementar" de Wittgenstein). Ela poderia ser composta de nomes em conexão imediata, tendo cada constituinte do fato atômico um nome distinto. Assim, ao escrever "*a*R*b*", asserimos que *a* mantém a reação *R* com *b*, em que "*a*" e "*b*" são os nomes de *a* e *b* e "R" ou, mais precisamente, a relação que estabelecemos entre "*a*" e "*b*" escrevendo "*a*R*b*" significa *R*.

A proposição é chamada, no caso em que há um nome distinto para cada objeto, de completamente analisada. Caso contrário, podemos *e.g.* ter apenas um sinal que significa "manter R com *b*". Este sinal então "significa" de uma maneira mais complicada em virtude de manter relações tanto com "R" quanto com "*b*"; mas, como antes, o sentido da proposição resulta do significa de suas partes.

(Ch I) Para *n* proposições atômicas, há 2^n possibilidades de verdade e falsidade, as quais são chamadas de *possibilidades de verdade* de proposições atômicas; de modo similar, há 2^n possibilidades de existência e não existência dos fatos atômicos correspondentes.

Wittgenstein diz que qualquer proposição expressa concordância ou discordância com certos conjuntos de possibilidades de verdade de proposições atômicas, e o sentido da proposição é sua concordância e discordância com as possibilidades correspondentes de existência e não existência de fatos atômicos.

Isto é ilustrado pelo seguinte simbolismo para funções de verdade. V representa o verdadeiro, F o falso e escrevemos as 4 possibilidades para 2 proposições atômicas assim:

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

Agora, colocando V diante de uma possibilidade para manifestar concordância e deixando uma possibilidade em branco para manifestar discordância, podemos expressar, por exemplo, p ⊃ q assim:

p	q	
V	V	V
V	F	
F	V	V
F	F	V

Ou, se adotarmos uma ordem convencional para as possibilidades, (V-VV)(p,q). Obviamente esta notação não requer que p e q sejam proposições atômicas.

Vemos, portanto, que muitos sinais proposicionais construídos de maneiras distintas são *tokens* da – ou "expressam" a – mesma proposição, pois ao expressarem concordância e discordância com os mesmos conjuntos de possibilidades de verdade eles possuem o mesmo sentido. Portanto, "p", "~:~p .v. ~p" "q⊃p:~q⊃p" são todos a mesma proposição: (VV- -)(p,q), na notação acima.

(?) É interessante observar que temos aqui a explicação fundamental das analogias entre o cálculo de proposições e o de classes, pois, se chamarmos as possibilidades de verdade com as quais uma proposição concorda de seus fundamentos de verdade, temos que a classe dos fundamentos de verdade de "p v q" é a classe soma dos fundamentos de verdade de p e q. A classe dos fundamentos de verdade de "p.q" é a classe produto daqueles de p e q. Os fundamentos de verdade de ~p são o conjunto complementar daqueles de p. Quando os fundamentos de verdade de "p" estão contidos nos de "q", "p" implica logicamente "q".

Isto explica as correspondências entre os dois sentidos, na lógica, de "produto", "soma" e entre inclusão e implicação lógica e entre a negação de uma proposição e o complementar de uma classe.

(Capítulo 1) Um ponto extremamente importante é que esta explicação do sentido de proposições também se aplica àquelas que contêm variáveis aparentes. Vamos expressar por "(----V)(ξ)", em que ξ é um conjunto de proposições, a discordância com todas as possibilidades exceto aquela em que todas as proposições ξ são falsas. Deste modo, nem sempre precisamos enumerar as proposições ξ se tivermos outro modo de indicar uma determinada coleção. Podemos fazer isto fornecendo uma função "$f\hat{x}$" e determinando que ξ seja o conjunto de seus valores. Então "(----V)(ξ)" é "~:(∃x).fx". De modo similar, "(x).fx" é o produto lógico de "f*a*", "f*b*" etc.

Esta concepção é rejeitada nos *Principia Mathematica* por razões que dependem principalmente de confundi-la com uma teoria distinta e indubitavelmente falsa. Esta confusão surge por meio da considera-

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

ção não da proposição geral "(x).fx", mas da forma particular "(x)φ(x) ⊃ ψ(x)", ilustrada por "todos os homens são mortais". É suficientemente óbvio que esta proposição não é o produto lógico da proposição "x é mortal" para tais valores de x que são homens; mas esta não é uma razão para asserir que não se trata absolutamente de um produto ou, em particular (como Wittgenstein defende), o produto das proposições "x é um homem implica que x é mortal" para todos os valores de x.

(Apêndice) Por exemplo, diz-se que o fato de que Sócrates é mortal não pode ser parte do que é asserido em "todos os homens são mortais", pois esta última proposição pode ser asserida por alguém que nunca ouviu falar de Sócrates. Porém, o que é asserido sobre Sócrates em "todos os homens são mortais" é meramente o fato de que, se ele é um homem, então ele é mortal, e não é claro que ele é, categoricamente, um mortal, já que o falante pode não saber se Sócrates é um homem. O fato de que o falante pode não ter ouvido falar de Sócrates não é uma objeção à nossa teoria, mas, pelo contrário, mostra a utilidade essencial da ideia de generalidade, que é o fato de nos permitir fazer asserções sobre coisas das quais nós não ouvimos falar ou, mais precisamente, das quais não temos nomes.

Devemos, porém, observar uma séria implicação de nossa concepção da generalidade: suponha que tivéssemos nomes para tudo "*a*", "*b*", "*z*", etc. Então, ao dizer "(x).fx" estamos meramente dizendo "f*a*. f*b*...fz"; mas pode-se questionar que certamente "(x).fx" é mais que isso, pois se sabemos que "f*a*.f*b*...fz", ainda não sabemos que "(x).fx", pois precisamos saber também que *a, b, ... z* são todas as coisas[5]. Para esta objeção, a resposta é que "*a*, *b*, ... *z* são todas as coisas" não é uma proposição ou um possível objeto de conhecimento, mas meramente um contrassenso. Esta concepção é realmente implicada pela asserção do Sr. Russell de que "*a* existe" é um contrassenso quando "*a*" não é uma descrição, mas um nome.

Isto resulta da doutrina fundamental da filosofia do Sr. Wittgenstein, à qual referência deve ser feita a sua própria obra. De modo breve, podemos explicar que "que *a*, *b*, ... *z* sejam todas as coisas" não é um fato empírico que deve ser adicionado a "f*a* ... fz" para compor "(x).fx", mas uma condição transcendental para que "f*a* ... fz" deva realmente ser "(x).fx", [uma condição] que "se mostra ela própria" na equivalência efetiva destes dois símbolos.

Temos, então, a doutrina geral, incluindo o caso das variáveis aparentes, de que o sentido de uma proposição é sua concordância e discordância com possibilidades de verdade de fatos atômicos. É claro, porém, que esta não é uma explicação completa do assunto; ela

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

5 Este ponto é levantado nas *Lectures on the Philosophy of Logical Atomism* de Russell.

fornece uma ideia geral dos sentidos possíveis que uma proposição pode ter, mas ela não explica qual sentido pertencerá a quais sinais proposicionais, i.e., com quais possibilidades de verdade qualquer combinação de símbolos especificada expressa concordância e discordância. Por exemplo, [ela não diz] como devemos analisar "A crê que '*a*R*b* .v. *c*S*d*'". No caso mais simples isto seria "há na mente de A nomes para *a*, *b*, *c*, *d*, R, S combinados de um certo modo"; e temos ainda que elucidar qual é o certo modo que significa "*a*R*b* ou *c*S*d*". Evidentemente não podemos dizer "combinados pelo sinal 'v' ou a palavra 'ou'", pois temos que levar em conta pessoas que falam em linguagens ou simbolismos desconhecidos ou até mesmo em imagens. Como estas pessoas podem usar (para expressar a disjunção) qualquer símbolo, a dificuldade parece ser insolúvel. Mas o gênio de Wittgenstein encontrou uma solução. Para entendê-la mais facilmente, consideremos, em vez da disjunção, o caso mais simples da negação, para o qual podemos citar suas próprias palavras "'~p' é verdadeira se 'p' é falsa. Portanto, na proposição verdadeira '~p', 'p' é uma proposição falsa. Ora, como pode o traço '~' levá-la a afinar-se com a realidade? O que nega em '~p' não é, porém, o '~', mas o que é comum a todos os sinais dessa notação que negam p. Portanto, a regra comum segundo a qual '~p', '~~~p', '~p .v. ~p', '~p.~p', etc. etc. (*ad inf*.) são constituídas" (5.512). O ponto é que temos de considerar quais são os aspectos significativos de nossos sinais; por exemplo, obviamente a diferença entre a escrita à mão e a impressa não é significativa; ela não afeta minimamente o sentido de nossas sentenças. Vamos considerar agora "~aRb", "~~~aRb"; estes sinais têm o mesmo sentido, são a mesma proposição; a diferença entre eles é, portanto, inessencial. Deste modo, se dissermos que simbolizamos ~p colocando um "~" antes de "p", com isso ainda não é dada uma explicação completa ou exata da questão. O modo pelo qual o simbolizamos é pela escrita *ou* de '~p', *ou* de '~~~p' ou de qualquer símbolo construído de acordo com uma certa regra; esta regra é difícil de fornecer, mas ela deve existir, pois deve haver uma diferença definitiva entre dados símbolos que significam ~p e aqueles que não o fazem. E vemos que, ao explicar quais sentidos as proposições possuem, temos que lidar não com meras marcas como ~, v, mas com regras de construção simbólica.

Mas a dificuldade ainda não é inteiramente removida; pois em cada linguagem e simbolismo haverá uma tal regra, e todas estas regras teriam que estar incluídas na análise de "A pensa ~p" se não sabemos em que linguagem A pensa. A solução é, porém, completada pela observação de que as regras para a expressão de ~p em todas as linguagens possíveis devem ter algo em comum, a saber, o fato de haver uma correspondência biunívoca formal entre os símbolos cons-

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

truídos de acordo com as duas regras. É como se fosse uma propriedade projetiva do conjunto de símbolos construídos de acordo com tal regra que sobrevivesse à projeção em outra linguagem. Portanto, se usarmos “x” em vez de “~”, teremos a óbvia correspondência “~p”, “xp”; “~~~p”, “xxxp” etc.

Entretanto, p. ex., entre os símbolos para ~p e os símbolos para p, não há uma tal correspondência formal[6]. Portanto, a análise de “A pensa ~*a*R*b*” é, *grosso modo*, “Há na mente de A nomes para ‘*a*’, ‘R’, ‘*b*’ agrupados em um símbolo cuja significatividade resulta de ele ser construído de acordo com uma regra, que é tal que os símbolos construídos de acordo com ela estão em uma correspondência formal biunívoca com aqueles construídos de acordo com a seguinte regra (aqui deve seguir a regra em uma dada notação)”[7].

É óbvio, a partir de considerações simples em conexão com a Teoria dos Tipos, que tais palavras como “pensa”, “significa” devem variar seu significado com o tipo da coisa ou da proposição que é pensada ou significada.

Agora temos que perceber que elas variam até mais que deste modo, que deve haver diversos sentidos de “significado” em que podemos significar não meramente coisas distintas, mas a mesma coisa. Para ser preciso, vamos considerar um sinal proposicional e seu sentido, e discutir o significado daquela palavra “sentido” que analisamos em linhas gerais acima. Descobrimos que, para uma proposição negativa, deve entrar na definição do “sentido” uma regra para a construção de tais proposições, e ao introduzir tais regras vimos como analisar o sentido do que podemos chamar de proposições *elementares*[8], i.e., proposições que são explicitamente construídas a partir de proposições atômicas por meio de operações de verdade (~, v, etc.). Mas ainda não tratamos da análise do “sentido” para outras proposições, *e.g.* aquelas que contêm variáveis aparentes. Claramente a análise destas proposições deve ser diferente, já que “(x).φx”, por exemplo, diz algo sobre todos os objetos do tipo x sem nomear nenhum. Não iremos discutir a análise aqui, mas ela é bastante complicada; todavia ela claramente deve proceder segundo as mesmas diretrizes dadas para o caso de proposições elementares.

Consequentemente, o sentido de uma proposição elementar é seu

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

6 Pode-se pensar, por exemplo, que poderíamos derivar as expressões para ~p a partir das expressões para p por meio de uma simples substituição de “~p” por p”, *e.g.* de “p”, “~p”, de “p v p”, “~p .v. ~p” ... etc. Deste modo, porém, não poderíamos derivar de nenhuma expressão para p a expressão, válida para ~p, “~(p .v. p)”.

7 Temos que inserir em tais frases algo do tipo “cuja significatividade resulta de” pois dizer meramente “um símbolo construído” não protegeria contra a possibilidade óbvia de que o símbolo tivesse, em outro sistema simbólico, um significado diferente daquele que ele tem no sistema realmente usado pelo pensador, o qual temos de algum modo que especificar.

8 Este não é o uso de Wittgenstein do termo “elementar”, mas é o do Sr. Russell.

sentido em um sentido distinto do sentido em que o sentido de uma proposição de ordem superior é seu sentido. Isto é, as duas proposições têm modos distintos de expressar concordância e discordância com possibilidades de verdade. É mais importante ver, todavia, que estas duas proposições podem ainda ter o mesmo sentido, isto é, expressar concordância e discordância, cada uma a seu modo, com os mesmos conjuntos de proposições. Por exemplo, se todas as coisas fossem enumeradas como "*a*", "*b*", ... "*z*", "φ*a*.φ*b*...φ*z*" seria uma proposição elementar e "(x).φx" não seria elementar, mas elas teriam o mesmo sentido[9], embora, como explicado anteriormente, os sentidos em que ele é o sentido destas proposições são diferentes. Além disso, como as duas proposições têm o mesmo sentido, elas são a mesma proposição, embora uma seja elementar e a outra não. Vemos que "elementar" não é, na verdade, uma característica da proposição como tal, mas apenas de seu modo de expressão; "proposição elementar" é como "palavra escrita": assim como a mesma palavra pode ser tanto escrita quanto falada, a mesma proposição pode ser expressa tanto de um modo elementar quanto não elementar.

(Apêndice) Devemos considerar, agora, a inferência lógica, da qual a teoria das proposições do Sr. Wittgenstein nos permite fornecer uma explicação extremamente simples. Vimos que qualquer proposição expressa concordância com certas possibilidades que ... (veja 0 abaixo)

(Capítulo I) Podemos explicar aqui o uso que Wittgenstein faz dos termos *operação de verdade* e *função de verdade*. Uma operação é o que deve ser feito com certas proposições, chamadas de bases da operação, para produzir outra proposição, chamada de resultado. Assim, "v" é uma operação que produz, a partir de "p" e "q", "p v q". Uma operação de verdade é uma operação tal que a verdade ou falsidade do resultado é determinado pela verdade ou falsidade das bases; consequentemente, "v", "~" são operações de verdade.

Uma proposição "P" é uma certa função de verdade de outras proposições "p, q, ...", chamadas de seus argumentos de verdade, quando a verdade ou falsidade de "P" é logicamente determinada de um modo definido pela verdade ou falsidade de p, q, ... Assim, "p v q" é a mesma função de verdade de p, q que "~(~r.~s)" é de r, s, pois ambas são verdadeiras se e somente se um de seus argumentos é verdadeiro. Não é preciso que o número de argumentos seja finito, ou que os argumentos ocorram explicitamente em "P". Deste modo, como foi explicado acima, "(x).φx" é o produto lógico (uma função de verdade) do conjunto de valores de "φx". Resulta de nossa explicação do sentido das proposições que toda proposição é uma função de verdade de

9 Um exemplo mais realista é dado por φ*a* e φa :v: (∃x)φx.~φx.

proposições elementares, e que duas proposições que são a mesma função de verdade das mesmas proposições elementares possuem o mesmo sentido, i.e., são, portanto, a mesma proposição.

(0) nós chamamos de seus fundamentos de verdade, e discordância com todas as outras possibilidades. Isto é, se um de seus fundamentos de verdade é o caso, ela é verdadeira, caso contrário ela é falsa. A partir disso, vemos que "p" se segue logicamente de "q" se e somente se os fundamentos de verdade de "q" estão contidos nos de "p" ou, em outras palavras, se todas as possibilidades consistentes com a verdade de "q" são consistentes com as de "p"[10]. Neste caso, podemos dizer que o sentido de "p" está contido no de "q", de modo que de uma proposição[11] não se pode inferir logicamente nada além dela e suas partes.

A justificação para estas expressões aparece de modo mais claro se considerarmos as formas padrão que, em teoria, podem expressar qualquer proposição. Explicamos acima a expressão de uma proposição P especificando V's e F's em um esquema de possibilidades de verdade. Claramente não precisamos fornecer ambos os V's e F's; ao considerar os V's, temos o conjunto de possibilidades das quais uma deve ser verdadeira para satisfazer a proposição. Estas possibilidades são elas próprias expressas por proposições que são conjunções de proposições atômicas e suas negações. Tal como "p.~q.~r", em que "p", "q", "r" são atômicas. Então P pode ser expressa como uma disjunção de suas possibilidades de verdade, *e.g.*, em uma forma do tipo "p.~q.~r :v: ~p.q.r :v: ~p.~q.r".

Consequentemente, qualquer proposição pode ser expressa (em teoria, não na prática) como uma soma lógica de produtos lógicos de proposições atômicas e suas simples negações.

Também podemos, contudo, expressar P por meio de seus F's: estes fornecem as possibilidades que fazem com que P seja falsa. Assim, P pode ser expressa como uma conjunção das negações destas possibilidades, *e.g.* em uma forma do tipo (esta é a negação de nosso exemplo anterior) "~:p.~q.~r :. ~ : ~p.q.r :. ~ :~p.~q.r" ou, transformando as negações de conjunções em disjunções de negações, como "~p .v. q .v. r : p .v. ~q .v. ~r : q .v. q .v. ~r".

Isto é, como um produto de somas de proposições atômicas e suas simples negações.

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

10 Em geral, p e q são funções de verdade de diferentes conjuntos de proposições atômicas, mas tomamos a soma destes conjuntos e consideramos todos os seus membros como argumentos de verdade de ambas as proposições p e q. *E.g.* p é esta função de p, q (VVFF)(p,q).

11 É claro que não deve ser suposto que estejamos discutindo o que pode ser inferido de uma oposição por oposição a duas ou mais. Qualquer número de premissas pode ser tratado como uma proposição conjuntiva.

Agora, se P se segue de Q e expressamos ambas as proposições deste modo como produtos de somas, o conjunto de termos dos quais Q é o produto lógico inclui o conjunto dos quais P é um produto (pois estes termos surgem das possibilidades das quais Q e P respectivamente discordam), de modo que Q é o produto lógico de P e de outra proposição, digamos, R. Portanto, Q pode ser colocado na forma P.R, e podemos dizer literalmente, em sentido absoluto, que quando P pode ser inferido logicamente de Q seu sentido já está contido no sentido de Q.

(Capítulo 1) Suponha que queiramos saber se uma proposição se segue de outra; se pudéssemos expressá-las nestas formas padrão, a resposta seria visivelmente óbvia. Na prática, ocorre que frequentemente não podemos expressar nossas proposições nestas formas, por exemplo, quando elas contêm variáveis aparentes, e a questão se torna mais complicada. Este problema é a essência da lógica e não é difícil ver que ele é também a essência da matemática. Considere como a matemática se insere na nossa vida: "a proposição matemática nunca é aquilo de que precisamos, mas utilizamos a proposição matemática *apenas* para inferir, de proposições que não pertencem à matemática, outras que igualmente não pertencem à matemática"[12], por exemplo, quando usamos $2\times2=4$ para inferir, de "Eu tenho duas moedas em cada mão" (uma proposição não matemática), que "Eu tenho quatro moedas no total" (uma proposição igualmente não matemática). É evidente também que proposições matemáticas não são, na verdade, proposições, isto é asserções de fato, mas fórmulas que facilitam o reconhecimento de inferências legítimas. Temos que investigar a natureza, a significatividade e a origem de tais fórmulas.

A classe mais importante destas fórmulas consiste naquilo que Wittgenstein chama de *tautologias*. Estas surgem do seguinte modo: suponha que consideremos as diversas funções de verdade de um certo conjunto de proposições atômicas, isto é, as diversas combinações de suas possibilidades de verdade com as quais podemos expressar concordância ou discordância. É evidente que há dois casos extremos, quais sejam, quando concordamos com todas as possibilidades e quando discordamos com todas elas. No primeiro caso, temos uma *tautologia*; no segundo, uma *contradição*. Assim, (VVVV)(p,q) é uma tautologia, (FFFF)(p,q) uma contradição.

É claro que uma tautologia não é uma proposição genuína, mas meramente uma forma simbólica que nada diz. Por exemplo, "eu não sei nada sobre o tempo quando eu sei que está chovendo ou não está chovendo". Se temos, também, uma proposição genuína e formamos

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

12 Wittgenstein 6.211.

o produto lógico dela com uma tautologia, deixamo-la inalterada; a tautologia não contribui em nada para o resultado. De outro lado, tautologias não são contrassensos, elas surgem naturalmente no uso ordinário da linguagem, podem ser incorporadas como partes de outras proposições; para muitos propósitos elas podem ser simplesmente contadas como proposições ordinariamente verdadeiras; além disso, elas tem uma função importante e singular que emerge do fato de que se “q” se segue de “p”, “p⊃q” é uma tautologia e, inversamente, se “p⊃q” é uma tautologia, “q” se segue de “p”.

Assim, a construção de tautologias da forma “ p⊃q” tem uma utilidade fundamental ao nos permitir ver que “q” se segue de “p” em casos complicados em que isto não é imediatamente óbvio. E os *Principia Mathemática* se destinam a ser uma coleção de tautologias desta forma. As proposições primitivas são tautologias[13], com a única notável exceção do Axioma da Redutibilidade que, seja verdadeiro ou falso, é claramente uma proposição genuína e não uma tautologia. Como a partir de tautologias apenas tautologias podem ser deduzidas, todo sistema seria composto – exceto por este único defeito – de tautologias.

Vemos agora claramente o erro essencial dos autores dos *Principia Mathematica*: eles supuseram que a matemática consiste de proposições gerais que diferem apenas na completude desta generalidade daquelas de outras ciências e que são deduzidas de axiomas aceitos primordialmente por razões indutivas. Com efeito, a matemática é inteiramente distinta de todas as outras ciências e não é absolutamente composta de proposições genuínas, ou ela não seria, como é, realmente *a priori*, mas [ela é composta] de tautologias ou, de modo mais geral, de fórmulas que facilitam a inferência lógica, as quais são construídas pelo processo de dedução simbólica de tautologias primitivas que devem ser, por sua vez, imediatamente vistas como tautológicas. Não pode ser uma questão de “evidência” [a verdade] destas tautologias primitivas; não podemos entender os símbolos sem entendê-los como tautológicos. Uma dúvida apenas surge quando os símbolos são bastante complicados para que nós apreendamos a proposição como um todo de um só golpe; então temos que nos convencer que um dado símbolo é uma tautologia por meio de sua construção, a partir de tautologias conhecidas, pelo processo de dedução lógica que, como vimos, pode apenas gerar, a partir de tautologias, [outras] tautologias.

Devemos, contudo, enfatizar que as proposições da matemática

13 Exceto aquelas expressas em palavras que são, em sua maioria, contrassensos pela teoria dos tipos, mas até certo ponto representam o que são, na verdade, convenções simbólicas.

não precisam ser todas tautologias neste sentido específico. Não é difícil imaginar outros tipos de fórmula que podem ser usadas do mesmo modo para facilitar a inferência: por exemplo, a identidade "*a*=*b*" onde "*a*" e "*b*" possuem o mesmo significado, isto é, qualquer proposição em que "*a*" ocorre preserva não meramente seu valor de verdade, mas seu sentido quando "*a*" é substituído por "*b*". Poderia muito bem ser suposto que "2+2=4" é uma tal identidade. É claro que, se o esquema dos *Principia Mathematica* fosse correto em suas linhas gerais, a matemática seria composta apenas de tautologias; mas tendo em vista a ilegítima introdução do Axioma da Redutibilidade e o tratamento insatisfatório da identidade, não é claro que os *Principia Mathematica* estão certos mesmo em suas linhas gerais, e não podemos dizer, mais precisamente, de que tipo de fórmulas a matemática é composta até termos resolvido os problemas mais minuciosos que surgem em sua fundamentação. Podemos dizer, porém, que chegamos nesta introdução a uma certa conclusão de imensa importância, a qual é uma das maiores descobertas do Sr. Wittgenstein, a saber, que a matemática não consiste de proposições genuínas, mas de fórmulas que são úteis para facilitar a inferência lógica.

(2).

(Artigo filosófico) É natural começar um sistema lógico com a forma mais simples de proposição: a proposição atômica. Esta, como vimos, é composta de nomes e assere a conexão, em um fato atômico, dos objetos correspondentes. Devemos, então, construir, a partir de proposições atômicas, formas cada vez mais complicadas. Tal procedimento tem, porém, uma penosa falta de contato com a realidade; na vida real, nunca nos deparamos com proposições atômicas, tampouco com proposições que podemos ver serem construídas a partir de atômicas de um modo definitivo estabelecido. Considere uma proposição tão simples quanto "Sócrates é sábio"; à primeira vista, parece que ela é atômica, mas pouca reflexão mostra que "Sócrates" e "sábio" não são, na verdade, nomes[14], mas complexos, analisáveis, símbolos incompletos na terminologia dos *Principia Mathematica*. Sabemos que, se analisarmos "Sócrates é sábio" o suficiente, devemos obter, no final, proposições atômicas, mas dificilmente somos capazes de começar a análise. Isto significa que não podemos atribuir "Sócrates é sábio" a nenhum lugar determinado de nosso sistema lógico, nem mesmo estar certo de que ele absolutamente possui um tal lugar,

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

14 Poder-se-ia pensar que eles fossem nomes de objetos complexos, mas toda a ideia de um objeto logicamente complexo é um contrassenso e surge apenas de não se distinguir símbolos apropriados daquilo de que eles são nome. Um símbolo complexo não é o nome de coisa alguma.

já que “Sócrates” pode ser um símbolo incompleto de um tipo distinto de todos que consideramos.

Infelizmente, a única alternativa é tornar nossa lógica um esquema ideal, ou seja, baseá-la diretamente na língua inglesa, o que envolveria difíceis questões gramaticais que não possuem relevância essencial para a matemática; e devemos enfrentar da melhor maneira que pudermos a dificuldade acima explicitada. Ela não é, na verdade, tão grande, pois é em todo caso fácil ver que a lógica e a matemática podem ser aplicadas a proposições de nosso cotidiano (embora uma justificação explícita possa ser desejável). O perigo reside, na verdade, no outro sentido: que insiramos em nosso esquema lógico algumas das características acidentais e desencaminhadores da língua inglesa; e para evitar este perigo devemos, em diversas ocasiões, referirmo-nos a esta importante distinção entre o esquema lógico e a língua inglesa.

Devemos, agora, explicar e distinguir os termos “símbolo” e “sinal”. Um “sinal” é um *type* cujos *tokens* possuem uma certa forma física, e ocorrem em proposições. Um “símbolo” é um *type* cujos *tokens* são *tokens*-sinais, unidos em *types* por um princípio distinto, a saber, de tal modo que podemos substituir um por outro em qualquer proposição sem alterar seu sentido. Vemos que um sinal proposicional é um sinal e uma proposição é um símbolo; temos simplesmente que estender a distinção da proposição para suas partes. O termo “expressão” será usado como sinônimo de “símbolo” quando lidamos com a linguagem do cotidiano em oposição ao esquema lógico.

É óbvio que nem toda sequência de símbolos é uma proposição. No inglês, sabemos que uma série de expressões não forma uma proposição a menos que seja uma sentença gramaticalmente correta; ela deve conter um verbo e assim por diante. Infelizmente, esta condição não é suficiente; muitas sentenças gramaticalmente corretas não são proposições significativas, mas contrassensos. Este fato é demonstrado conclusivamente pela contradição do Sr. Russell sobre a classe de todas as classes que não são membros de si próprias, da qual não há escapatória exceto pela suposição de que algumas das sentenças gramaticalmente corretas usadas em sua formulação devam ser contrassensos. Este simples fato de que a gramática não é garantia de significatividade, o qual foi percebido por Hobbes, constitui a parte mais valiosa da “Teoria dos Tipos” dos *Principia Mathematica*, que usou a ideia vaga e irrelevante de “totalidades ilegítimas” para mostrar serem contrassensos certas formas simbólicas que não seriam tomadas como dotadas de sentido por ninguém que já tivesse se livrado do preconceito de que todas as sentenças gramaticais são significativas.

Podemos distinguir, dentre as expressões, “substantivos” e “adjeti-

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

vos”. Assim, “Sócrates” é um substantivo, “sábio” um adjetivo. Temos que descobrir a razão fundamental desta distinção; uma concepção comum é que substantivos e adjetivos são nomes de dois tipos de objetos fundamentalmente distintos, a saber, indivíduos particulares e universais. Esta concepção é claramente equivocada, já que vimos anteriormente que eles não são absolutamente nomes; mas não é de modo algum claro que objetos não sejam divisíveis em indivíduos e propriedades, e que substantivos e adjetivos são distinguidos por terem propriedades análogas às propriedades dos nomes de indivíduos e universais.

Qual diferença, então, podemos observar entre adjetivos e substantivos? Percebemos um tipo de incompletude no adjetivo, mas se explicarmos esta incompletude como sendo aquela que é preciso ser completada por outra expressão para se ter uma proposição, não podemos negar que isto vale também para o substantivo. Entretanto, que deve haver algo de válido neste ponto se mostra pela enorme conveniência de um simbolismo em que adjetivos são representados por uma lacuna a ser preenchida, *e.g.*, em $\varphi\hat{x}$, ao passo que substantivos são representados por uma simples letra como “*a*”. A solução é que nós frequentemente usamos expressões como um modo de fornecer um conjunto de proposições que podem ser formadas completando--as; podemos, por exemplo, querer asserir que todas estas proposições são verdadeiras. Para este fim, podemos querer distinguir mais de um modo de completar a proposição; “sábio”, por exemplo, nos fornece não apenas o conjunto de proposições da forma “x é sábio”, mas também o conjunto mais abrangente de todas as proposições de formas quaisquer que contêm a palavra “sábio”, incluindo, portanto, *e.g.* “se Platão fala a verdade, Sócrates era sábio”. A utilidade da forma simbólica “$\hat{x}$ é sábio” é que ela indica como completar a expressão “sábio” de modo a obter o conjunto mais restrito de proposições que precisamos, por exemplo, para dizer “alguém é sábio”. Distinguimos entre este conjunto mais restrito de valores de “$\hat{x}$ é sábio” e o conjunto mais amplo de valores de f{$\hat{x}$é sábio}; e fazemos uma distinção similar no que diz respeito a cada expressão adjetiva.

Em relação a substantivos, entretanto, as coisas se comportam diferentemente; o único conjunto de proposições que consideramos como determinados por “Sócrates” é o mais amplo conjunto possível de proposições em que “Sócrates” ocorre de algum modo, i.e., os valores de “f(Sócrates)”. Assim, não é preciso usar, ao invés de “Sócrates”, um símbolo funcional como “Sócrates é $\hat{f}$”, já que o conjunto de valores de “Sócrates é $\hat{f}$” seria o mesmo conjunto que o conjunto de

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

“f(Sócrates é $\hat{f}$)” ou, simplesmente, “f(Sócrates)”[15].

Encontramos, aqui, a diferença essencial entre substantivos e adjetivos, a saber, o fato de que, no caso do adjetivo, precisamos distinguir um subconjunto particular de proposições em que ele ocorre como sendo aquelas em que ele é predicado do um sujeito, ao passo que, no caso do substantivo, qualquer proposição em que ele ocorre é considerada como predicando um adjetivo dele. Consequentemente, em “Sócrates é sábio”, “Platão é sábio”, “sábio” é predicado de sujeitos; mas em “Nem Sócrates nem Platão são sábios”, isto não é o caso e, ao contrário das duas anteriores, esta última proposição não justificaria que disséssemos “alguém é sábio”. Por outro lado, todas as proposições “Platão é sábio”, “Platão é belo”, “Platão não é nem sábio nem belo” predicam adjetivos de Platão e justificam “Platão possui alguma característica”[16].

Esta é a diferença essencial entre substantivos e adjetivos e ela claramente não é pautada em nenhuma propriedade lógica dos objetos a que substantivos e adjetivos referem, mas apenas em tipos de interesse que temos nestes objetos. Ela surge simplesmente de não termos nenhuma inclinação para fazer asserções de certos tipos, a saber, asserções que envolveriam fazer distinções lógicas entre os diversos tipos de expressão que são agrupadas como “adjetivos” predicáveis de um certo tipo de substantivo.

Se, por exemplo, quiséssemos discutir qualidades simples de uma coisa e mantê-las separadas de suas propriedades em sentido mais amplo, a coisa[17] se tornaria um adjetivo; deveríamos achar útil adotar, ao invés do símbolo “Sócrates”, tal forma funcional como “Sócrates é$\hat{f}$”. Apenas então poderíamos distinguir as duas proposições “Sócrates possui todas as qualidades de Platão”: “Sócrates possui todas as propriedades de Platão” como “(p): Platão é p .⊃. Sócrates é p” e “(φ) : φ(Platão é$\hat{f}$) .⊃. φ(Sócrates é$\hat{f}$)”, respectivamente. Assim, a distinção entre substantivo e adjetivo é realmente muito fraca e fictícia[18], e não fornece nenhum suporte à ideia de que objetos caem

15 Esta é a resposta à objeção do Sr. Johnson para a recusa da proposta do Sr. Russell de deixar o adjetivo estar por si próprio (Logic, Part II, p. 52) e de seu uso das formas “Socrates”, “$\hat{x}$é sábio”, mas não “Socrates éf ”, “sábio” (*op. cit.*, p. 24) .

16 Cf. Sr. Johnson (*op. cit.* p. 61) “Podemos construir, de maneira apropriada, um adjetivo composto a partir de adjetivos ‘simples’ assim como podemos construir uma proposição composta a partir de proposições ‘simples’, entretanto, a natureza de qualquer termo que funciona como substantivo é de tal modo que é impossível construir uma substantivo composto genuíno”.

17 É difícil evitar a aparência de confusão do símbolo com seu significado. Aqui, estamos na verdade falando apenas de símbolos, sendo a ‘coisa’ o significado imaginário de uma expressão substantiva “incompleta”, que se tornaria um adjetivo na eventualidade mencionada. Devemos repetir que substantivos e adjetivos são símbolos, não objetos.

18 Isto também pode ser visto pelo fato de que as coisas mais substantivas de todas as coisas, quais sejam, os objetos materiais, aparecem em *Natural Philosophy* do Sr. Whitehead como adjetivos.

em duas grandes categorias lógicas, particulares e universais. Este fato reaparecerá claramente em nossa estrutura lógica, para a qual devemos nos voltar e encerrar esta digressão no reino da linguagem ordinária.

(Capítulo IV) Começamos com proposições atômicas; estas poderiam ser expressas pelo uso de nomes, apenas, sem nenhuma constante lógica. Mas nem toda sequência de nomes fornece uma proposição, pois muitas meramente resultam em contrassenso; para fazer sentido, os nomes devem ser nomes de objetos que podem, possivelmente, juntar-se em um fato atômico. Supomos que objetos dividem-se em tipos, de tal modo que a substituição do nome de um membro de um tipo pelo de outro membro do mesmo tipo nunca transforma sentido em contrassenso ou contrassenso em sentido. Esta hipótese, que é derivada de uma propriedade bastante geral de expressões na linguagem ordinária, meramente evita complicações fastidiosas; se ela fosse falsa, poderíamos ainda delimitar uma região do mundo, i.e., um conjunto de proposições elementares, em que ela vale e confinar nossa atenção a esta região.

(Nota do apêndice) Poder-se-ia pensar que podemos classificar de uma só vez proposições de algum modo, tal como o seguinte:

Aquelas da forma $\alpha(x)$ ou $R_1(x)$ que dizem que x tem o predicado α (ou R_1)

--------------------- xR_2y ou $R_2(x,y)$ --------------------- a relação R_2 (em intensão)

--------------------- $R_3(x,y,z)$ … x,y,z estão na relação ternária R_3

e assim por diante.

Este é, porém, um equívoco; pois não há razão por que um dos objetos em um fato atômico deva ter uma posição peculiar como têm R_1, R_2, R_3 no esquema acima. Um fato atômico poderia ser da forma "xy", i.e., ter dois termos que poderiam ser considerados indiferentemente como sujeito e predicado, os quais podem até mesmo ser do mesmo tipo. As noções de predicado e relação são derivadas da noção de função proposicional, a qual temos agora de considerar, e que não envolve, como veremos, nenhum tipo de dualismo fundamental entre objetos.

(Capítulo IV) *Suponha que estejamos particularmente interessados* na noção de uma *função proposicional de indivíduos*; com este termo queremos dizer um símbolo da forma "$f(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \ldots)$", que é de tal modo que a substituição de $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}, \ldots$ por nomes de quaisquer indivíduos resulta sempre em uma proposição. A respeito desta definição, é preciso notar diversos pontos: primeiramente, que uma função de

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

indivíduos não é um objeto, mas um símbolo; em segundo lugar, que ela é um símbolo de tal tipo que ela se tornaria, em nossa linguagem lógica, uma proposição não apenas pela substituição das variáveis por quaisquer nomes que já tenhamos, mas também por quaisquer novos nomes para indivíduos anteriormente não nomeados; em terceiro lugar, que, assim como dois símbolos podem ser instâncias da mesma “proposição”; dois símbolos para funções são instâncias da mesma função considerada como *type* não meramente quando eles são fisicamente semelhantes, mas, de modo mais geral, também se com a inserção de nomes para os mesmos conjuntos de indivíduos elas sempre fornecem a mesma proposição; portanto, se “f(a,b,c)”, “g(a,b,c)” são a mesma proposição para qualquer conjunto a, b, c, $f(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ e $g(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ são a mesma função.

Considere, por motivos de simplicidade, uma função de uma variável $f\hat{x}$; então chamamos de “fx” um valor ambíguo desta função, e a proposição “f*a*”, em que “*a*” é o nome de um indivíduo, nós chamamos de valor de “fx” com “*a*” como argumento[19].

Agora podemos introduzir a variável individual aparente. Dada uma função “$f\hat{x}$”, vimos que, para cada indivíduo, ela fornece uma proposição[20] que é o valor da função para o nome do indivíduo como argumento, não importa se tenhamos dado ou não um nome para este indivíduo. Assim, a função agrupa um conjunto de proposições que são definitivamente determinadas pela especificação da função; asserimos a soma lógica e produto lógico destas proposições escrevendo, respectivamente, “(∃x)fx”, “(x)fx”.

Este procedimento pode obviamente ser estendido para diversas variáveis; considere “$f(\hat{x}, \hat{y})$”. Se fornecemos a “$\hat{y}$” qualquer valor constante “η”, então “$f(\hat{x}, \eta)$” fornece uma proposição se qualquer nome de indivíduo substituir $\hat{x}$, e é, então, uma função de uma variável. Deste modo, podemos formar as proposições “(∃x).f(x, η)”, “(x). f(x, η)”. Considere o símbolo “$(\exists x).f(x, \hat{y})$”. Ele fornece uma proposição quando qualquer nome (*e.g.* η) substitui “y”, e é, portanto, uma função de uma variável, de modo que podemos formar as proposições “(∃y):(∃x).f(x,y)”, “(y):(∃x).f(x,y)” e, de modo similar, “(∃y):(x).f(x,y)”, “(y):(x).f(x,y)”.

Como até então não tem havido nenhuma dificuldade, devemos tentar tratar uma função de funções *da mesma maneira que funções* de indivíduos[21].

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

---

19 Por “função” devemos sempre entender “função proposicional” a menos que haja alguma indicação contrária.

20 Isto é, é claro, um proposição considerada como *type*, que pode não ter nenhuma instância.

21 Observe que as expressões “função de funções”, “função de indivíduos” não são na verdade análogas já que indivíduos são objetos, mas funções são símbolos. Seria mais correto dizer “funções de nomes de indivíduos”, mas isto seria desnecessariamente enfadonho.

Considere a ideia de uma função de uma variável cujos argumentos são funções de indivíduos. Por tal função entendemos um símbolo da forma “$F(\phi\hat{x})$”, tal que se qualquer função de um indivíduo substitui “$\varphi\hat{x}$”, o resultado é uma proposição. Isto deve ser o caso não apenas em relação à substituição de qualquer função que já temos em mãos, mas também de qualquer função que possamos construir a qualquer momento. Assim, “$F(\phi\hat{x})$” agrupa um conjunto de proposições, uma para cada função possível ou real de um indivíduo, do qual asserimos a soma lógica e o produto lógico escrevendo, respectivamente, “ $(\exists\varphi).F(\varphi\hat{x})$”, “$(\varphi).F(\varphi\hat{x})$”.

Mas esta explicação possui o óbvio defeito de que temos de introduzir a ideia de “todas as funções possíveis de indivíduos”, isto é, todos os possíveis símbolos nos quais a inserção de um nome individual sempre forneceria uma proposição. Enquanto os argumentos possíveis para uma função de indivíduos formam uma determinada extensão, pois eles devem ser nomes de um determinado conjunto de objetos, quais sejam, os indivíduos, os possíveis argumentos para uma função de funções são todos os símbolos de um certo tipo que podem, possivelmente, ser construídos. Esta última extensão não parece ser fixada objetivamente tal como a extensão de indivíduos, mas parece depender de nossa engenhosidade para a construção de símbolos. Claramente precisamos defini-la de modo mais preciso; podemos fazê-lo de dois modos: subjetivamente ou objetivamente. O método subjetivo seria estabelecer certos princípios precisos de construção simbólica e definir a extensão como sendo todos os símbolos que poderiam ser construídos de acordo com estes princípios. Este é, no essencial, o método dos *Principia Mathematica*, que necessita da introdução do objetável Axioma da Redutibilidade; nós, por outro lado, seguiremos um método objetivo e abordaremos o problema de um modo distinto. O problema é, em última instância, fixar, como valores de “$F(\varphi\hat{x})$”, um conjunto determinado de proposições, de modo que possamos asserir seu produto e soma lógica; o método de Russell é determiná-las como sendo todas as proposições que poderiam ser construídas de um certo modo; o nosso método é colocar de lado como irrelevante o modo pelo qual poderíamos construir estas proposições e determiná-las por uma descrição de seus sentidos; ao fazê-lo, podemos ser capazes de incluir neste conjunto proposições para as quais não conhecemos nenhum método de construção, assim como incluímos na extensão de valores de “φx” proposições que não podemos expressar pela falta de nomes para todos os indivíduos.

Começamos por definir uma *função atômica* de indivíduos como o resultado da substituição, em qualquer proposição atômica, expressa apenas pelo uso de nomes, de quaisquer nomes de indivíduos por letras de

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

variáveis $\hat{x}$, $\hat{y}$...etc; em que nomes distintos devem ser substituídos por variáveis distintas ou deixados separados em ocorrências distintas.

É fácil ver que todos os valores de uma função atômica de indivíduos são proposições atômicas.

Em seguida, produzimos uma simples extensão para funções proposicionais da noção de uma função de verdade já explicada para proposições na página ... . Suponha que tenhamos funções de indivíduos "$\varphi_1 \hat{x}, \hat{y}$", "$\varphi_2 \hat{x}, \hat{y}$", etc.; então, ao dizer que uma função $f \hat{x}, \hat{y}$ é uma certa função de verdade (*e.g.* a soma lógica) das funções "$\varphi_1 \hat{x}, \hat{y}$ ", "$\varphi_2 \hat{x}, \hat{y}$" e das proposições "p, q, ...", queremos dizer que qualquer valor de $f_1 \hat{x}, \hat{y}$, digamos, com "*a*" "*b*" como argumentos, é aquela função de verdade dos valores correspondentes de "$\varphi_1 \hat{x}, \hat{y}$" etc., i.e., " $\varphi_1 a, b$", "$\varphi_2 a, b$"... e p, q. Esta definição nos permite incluir funções entre os argumentos de qualquer função de verdade, tenha ela um número finito ou infinito de argumentos.

Definimos, agora, uma *função predicativa* de indivíduos como qualquer função de verdade que tem funções atômicas e proposições atômicas como argumentos (a extensão para diversas variáveis é trivial). Isto define uma extensão determinada de funções, muitas das quais, porém, não podemos construir por serem funções de verdade de um número infinito de argumentos. Como exemplos de funções predicativas, podemos fornecer "$f \hat{x}, \hat{y}$" , "$f \hat{x}, \hat{y} v p$" , "$(y). f \hat{x}, y$" (onde "p" é uma proposição atômica, "$f \hat{x}$", "$f \hat{x}, \hat{y}$" funções atômicas, "$(y). f \hat{x}, y$é predicativa pois ela é o produto lógico de funções atômicas "$f \hat{x}, y$" para diferentes valores de y).

Passamos à definição de funções atômicas e predicativas de funções. Uma função atômica de funções de indivíduos pode apenas ter um argumento, que é uma função e deve ser da forma "$\phi(\hat{x}, \hat{y}, \ldots, a, b)$ " em que "*a*", "*b*" são nomes de indivíduos. Uma função predicativa de funções e indivíduos é qualquer função de verdade cujos argumentos são ou funções atômicas de funções e indivíduos ou proposições. *E.g.* "$\phi a . \supset . \psi b$" (uma função de duas variáveis), "(*x*).ϕ*x*" (o produto lógico das funções atômicas "ϕa", "ϕb", etc.). Portanto, funções ocorrem apenas em posições predicativas por meio de seus valores.

Agora, considere uma proposição tal como "$(\varphi). F(\varphi \hat{x})$", em que "$F(\varphi(\hat{x}))$" é uma função predicativa de funções. Entendemos ser a extensão de "$\varphi \hat{x}$" a totalidade de funções predicativas; i.e., a proposição é o produto lógico das proposições "$F(\varphi \hat{x})$" para cada função predicativa "$\varphi \hat{x}$"; e este é um conjunto determinado de proposições. Assim, atribuímos a "$(\varphi). F(\varphi \hat{x})$" um significado determinado.

Considere, em seguida, "$(\varphi). F(\varphi \hat{x}, \hat{y})$". Esta é uma função predicativa (de $\hat{x}$)? Ela é o produto lógico das funções $F(\varphi \hat{x}, \hat{y})$para dis-

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

tintos valores de "$\varphi\hat{y}$", os quais, assim como "$F(\phi\hat{x}, \hat{y})$" é predicativa, são por sua vez funções de verdade de funções da forma "$\varphi\hat{x}$" e de proposições tais como "φa" que são constantes em x. Consequentemente, "$(\varphi).F(\varphi\hat{x}, \hat{y})$" é uma função de verdade de funções "$\varphi\hat{x}$" e de proposições e, portanto, como as funções "$\varphi\hat{x}$" são predicativas, ela é predicativa. Portanto, "$(\varphi).F(\varphi\hat{y}, \hat{x})$" seria um dos valores de "$\varphi\hat{x}$" na extensão considerada em "$(\varphi).F(\varphi\hat{x}, a)$"[22], o que parece ser circular. Por exemplo, considerando o caso particular em que "$(\varphi).F(\varphi\hat{y}, \hat{x})$" é atômica = "$\phi\hat{x}$", podemos considerar, sem um círculo vicioso, que um dos valores de "$\varphi\hat{x}$" em "$(\varphi).\varphi a$" seja "$(\varphi).\varphi\hat{x}$"?

Um pouco de reflexão mostra, porém, que não se trata na verdade de um círculo vicioso. O fenômeno emerge do fato óbvio de que o produto lógico (ou a soma lógica) de um conjunto de argumentos pode ser ele próprio um elemento do conjunto. Portanto, a soma e produto lógicos de "p v q", "p", "q", "p.q" são "p v q", "p.q". De modo similar, "$(\varphi).\varphi a$" é o produto lógico do conjunto de proposições "φa", uma das quais é o próprio produto lógico "$(\varphi).\varphi a$". Em geral, "$(\varphi).F(\varphi\hat{x}, a)$" é o produto lógico do conjunto de proposições "$F(\varphi\hat{x}, a)$" para todas as funções predicativas $\varphi\hat{x}$; o membro do conjunto correspondente à função "$(\varphi).F(\varphi\hat{y}, \hat{x})$", o qual mostramos acima ser predicativo, é a própria proposição "$(\varphi).F(\varphi\hat{x}, a)$". Mas não há nada objetável nela, não mais do que no fato de que "p.q" é o produto de "p", "q", "p.q", um conjunto que contém a própria proposição "p.q".

Segundo a concepção adotada nos *Principia Mathematica*, porém, isto é um círculo vicioso; havia, para isso, duas razões; a primeira era que certos paradoxos poderiam ser solucionados desta maneira. Vamos discutir isto posteriormente e fornecer a verdadeira solução que está de acordo com a teoria aqui adotada. A outra razão era que, nos *Principia*, nosso método objetivo de fixar a extensão de proposições predicativas foi rejeitado em benefício de um método subjetivo. Este método consiste em definir o conjunto de funções predicativas, i.e., a extensão envolvida em "$(\varphi).F(\varphi\hat{x})$" como todos símbolos que poderíamos construir de uma certa maneira. Podemos chamar tais funções de "elementares". uma função elementar é o resultado da substituição de constantes por variáveis em uma proposição elementar. Uma proposição elementar, como explicamos acima, é uma proposição construída explicitamente a partir de proposições atômicas por meio do sinal de incompatibilidade "|", i.e., "~(p v q)", em que "p", "q" são atômicas, mas nenhuma proposição que contém uma variável aparente pode ser elementar. Explicamos acima que "elementar" não é uma

22 A permuta de "$\hat{x}$", "$\hat{y}$" é imaterial, e meramente feita com a intenção de tornar o argumento mais cristalino.

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

característica da proposição, mas apenas da instância particular em questão, "proposição elementar" sendo análoga a "proposição falada". Mas apenas certas proposições podem ser elementariamente expressas, a saber, aquelas que são funções de verdade de apenas um número finito de proposições atômicas como argumentos. De modo similar, nem todas as funções podem ser expressas como elementares, mas apenas funções de verdade de um número finito de funções atômicas e proposições como argumentos.

Se, então, a extensão de $\varphi\hat{x}$ é aquela das funções elementares, "$(\varphi).F(\varphi\hat{y},\hat{x})$" não é uma função elementar, tampouco ela poderia ser expressa enquanto tal (supondo, como é provável, que o número de funções elementares é infinito); ela é um novo tipo de função construída de um novo modo. Podemos, agora, construir uma extensão de funções "$\varphi_1\hat{x}$" que inclui não apenas funções elementares, mas também funções da forma "$(\varphi).F(\varphi\hat{y},\hat{x})$", e formar a proposição "$(\varphi_1).F(\varphi_1\hat{y},a)$" e a função "$(\varphi_1).F(\varphi_1\hat{y},\hat{x})$", mas esta não será uma das funções "$\varphi_1\hat{x}$", já que ela é construída de um modo novo que envolve uma referência a "todas as funções '$\varphi_1\hat{x}$'". Claramente, se definimos nossas extensões de funções por meio do modo pelo qual poderíamos construir as funções, nunca podemos obter uma extensão completa; e nunca podemos falar sobre a totalidade de tais funções já que, ao fazê-lo, construímos uma nova função não incluída na totalidade, pois ela é construída de tal modo a pressupor esta totalidade como já completa. A ideia da totalidade de todas as funções que podem ser alcançadas por um número indefinido de estágios deste processo claramente conteria um círculo vicioso.

É por esta razão que o Axioma da Redutibilidade foi introduzido nos *Principia Mathematica*. Ele assere, em nossa terminologia, que para quaisquer funções de indivíduos há uma função elementar equivalente, em que duas funções são chamadas de "equivalentes" se seus valores para os mesmos argumentos são sempre os mesmos. Não há razão para acreditar que este axioma é verdadeiro, e se ele fosse verdadeiro ele teria apenas o estatuto lógico de uma generalização empírica, não o de uma tautologia, e estaria inteiramente fora de lugar em um sistema lógico. O Axioma da Redutibilidade não deve ser confundido com o resultado que obtivemos acima (ou ainda com uma extensão trivial dele[23]) de que todas as funções em questão são, no sentido em que estipulamos, predicativas. Nos *Principia Mathematica*, o que chamamos de "elementar" foi chamado de "predicativa"; de modo que o Axioma diz que "para cada função há uma função predicativa

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

23 Nosso resultado para funções foi obtido por meio de generalização para a extensão de funções predicativas; mas o mesmo argumento é aplicável a funções obtidas por generalização para uma extensão mais ampla tal como, *e.g.*, o de funções elementares.

equivalente”. Parecemos ter ido ainda mais longe que isto ao dizer que todas as funções em questão (não “cada função”, como veremos mais tarde) não são meramente equivalente a funções predicativas, mas são elas próprias predicativas. Mas é preciso repetir que estamos usando a palavra “predicativa” em um sentido novo, não no sentido dos *Principia Mathematica*, o qual nós substituímos por “elementar”.

Vale a pena insistir com algum pormenor nesta distinção imensamente importante entre procedimentos subjetivos e objetivos, e agora aquilo que seria um círculo vicioso em um caso é inteiramente irreprochável no outro.

A diferença entre eles ocorre não apenas aqui, mas em toda parte no que se refere aos fundamentos da matemática. Por exemplo, quando falamos do conjunto dos números reais, ou de funções de uma variável real, podemos querer dizer ou aquelas que poderíamos definir, isto é, construir uma fórmula ou símbolo para apresentá-la, ou uma extensão muito mais ampla; por exemplo, há 2^{χ_0} números reais no total, mas claramente não podemos definir mais do que χ_0. A teoria dos agregados e a teoria das funções repousam inteiramente no fato de que consideramos a extensão objetiva e não a subjetiva. Como é bem conhecido, funções matemáticas e agregados são derivados, em última instância, de funções proposicionais, e a decisão sobre se aderimos a uma concepção objetiva ou subjetiva daqueles dependerá da decisão de qual concepção será adotada a respeito destes. Apenas nos *Principia* foi feita a tentativa incorreta de combinar, por meio do axioma da redutibilidade, uma teoria objetiva dos agregados e das funções matemáticas com uma teoria subjetiva das funções proposicionais.

Examinemos mais de perto esta diferença em conjunto com as famosas contradições, para as quais devemos, por um momento, direcionar nossa atenção. Elas podem ser divididas em duas classes que podemos chamar de A e B, como se segue:

<u>A</u>

1. A classe das classes que não são membros de si próprias
2. A relação entre duas relações quando uma não mantém a relação que ela é com a outra.
3. O maior ordinal (também o maior cardinal)

<u>B</u>

4. “Eu estou mentindo”
5. “O menor inteiro não nomeável em menos de vinte e três sílabas”
6. O menor ordinal indefinível
7. O paradoxo de Richard

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

8. O paradoxo de Weyl sobre “heterológico”

(para as primeiras sete contradições, Cf. *Principia Mathematica*, vol I, p. 63. Para o último, Cf. H. Weyl “*Das Kontinuum*”[24])

Para as contradições do primeiro grupo, Russell forneceu a solução correta, que consiste essencialmente em observar que “$\varphi(\varphi\hat{x})$” deve ser um contrassenso; ou, como Wittgenstein preferiria dizer, que em tal proposição os dois “φ’s” não podem ter o mesmo significado ou até mesmo significar logicamente do mesmo modo. Para evitar estas contradições, temos, portanto, que distinguir funções de acordo com seus argumentos possíveis; mas isto resolve apenas as contradições do grupo A, não aquelas do grupo B. Era o segundo grupo a que fizemos referência acima que fornecia a outra razão em favor da distinção adicional entre funções feita nos *Principia Mathematica*, por meio da qual funções que recebem os mesmos argumentos são separadas em tipos, e uma confusão destes tipos é considerada como um círculo vicioso. Então é o grupo B que nos interessa aqui e que devemos considerar de modo detalhado.

Primeiramente, devemos apontar para a óbvia diferença entre os dois grupos, diferença de que notavelmente não se encontra nenhuma menção nos *Principia*. O grupo A é composto de contradições que ocorreriam em um sistema lógico caso não se tomasse medidas contra eles (*e.g.* no sistema de Frege). Eles são formulados em termos puramente lógicos (classe, número etc.) e mostram que deve haver algo de errado com nossa lógica. Mas as contradições do grupo B não são puramente lógicas, e não podem ser formuladas apenas em termos lógicos, pois todas elas contêm alguma referência ao pensamento ou à linguagem, que não são conceitos matemáticos ou lógicos, mas empíricos. Então, eles podem surgir não por meio de uma lógica defeituosa, mas por meio de ideias defeituosas referentes ao pensamento e à linguagem. Eles, portanto, não dizem respeito à matemática ou à lógica no sentido de um sistema simbólico, embora evidentemente eles seriam relevantes para a lógica no sentido da análise do pensamento[25].

Este ponto de vista em relação ao segundo grupo de contradições já foi considerado anteriormente; Peano, por exemplo, nota a respeito do paradoxo de Richard: “Sed puncto debile principale in mirabile exemplo de Richard es: definitione de N es dato parte in symbolos, parte non in symbolos. Parte non symbolico contine idea de ‘lingua commune’, idea molto familiare ad nos, sed non determinato, et causa

24 Explicaremos aqui a contradição de Weyl para beneficiar leitores que não têm esta obra em mãos.

25 Frequentemente deixamos de separar estes dois sentidos da palavra “lógica”, que pode querer dizer ou uma parte da matemática ou uma parte da filosofia.

de omniambiguitate. Exemplo de Richard non pertine ad Mathematica, sed ad Linguistica”[26].

Há, porém, uma certa incompletude em tal atitude. Temos uma contradição que envolve tanto ideias matemáticas quanto linguísticas; o matemático a despreza dizendo que a falha deve estar no elemento linguístico, a autoridade linguística pode desprezá-la pela razão oposta e a contradição nunca será então resolvida. A única solução que já foi dada por alguém, que é aquela dos *Principia* (as outras “soluções” sendo meramente desculpas para não solucioná-la) atribui definitivamente estas contradições a uma lógica defeituosa; nós forneceremos uma solução alternativa, atribuindo-as a um uso defeituoso de palavras como “nomeia”, “define”, “significa”, os quais não ocorrem em um sistema lógico.

Talvez a mais instrutiva destas contradições é a de Weyl, a qual explicaremos a seguir. Alguns adjetivos possuem significados que são predicados à própria palavra adjetiva; assim a palavra “curto” é curta, mas a palavra “longo” não é longa. Chamemos os adjetivos cujo significado é predicado dos adjetivos, tais como “curto”, autológicos; os outros são *heterológicos*. Agora, “heterológico” é heterológico? Se ele é, seu significado não é um de seus predicados, portanto, ele não é heterológico; mas se ele não é heterológico, ele é autológico e seu significado é um de seus predicados, portanto, ele é heterológico. Portanto, temos uma contradição; se ele é heterológico, ele não é, em todo caso, heterológico; mas se ele não é, ele é, em todo caso, heterológico.

Antes de explicar a solução das contradições seria útil discutir o uso destas palavras (“significa”, “nomeia”, etc.) em conexão com funções proposicionais. A noção fundamental de que devemos tratar é a de um signo usado para *expressar* ou *significar* uma função proposicional, isto é, um tal signo como “φ” em que “$\varphi\hat{x}$” é uma função proposicional. Pode-se pensar que seria errado dizer que um sinal significa uma função, já que as próprias funções são símbolos. Mas isto desconsidera a importante distinção feita, seguindo Wittgenstein, entre a noção de um sinal e a de um símbolo. Vimos que vários sinais foram agrupados enquanto pertencentes ao mesmo *type* de um símbolo de acordo com os sentidos das proposições em que eles ocorriam. Consequentemente, podemos arbitrariamente determinar um sinal para “expressar” ou “significar” um certo símbolo; isto é, em virtude de nossas determinações, o signo possui certas relações de significatividade com a realidade, como resultado de que proposições em que ele ocorre possuem certos senti-

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

26 R.dM VIII p. 156.

dos. Assim, se eu defino que "φx" deve ser uma abreviação para "*a*Rx", em que "*a*", "R" são nomes, "φ" se relaciona de um certo modo com *a* e *R*, e dizemos isto abreviadamente dizendo que este sinal expressa ou significa a função $aR\hat{x}$ (a qual nós escrevemos agora sem aspas). Neste uso, "expressar" e "significar" são ambíguos, do mesmo modo que o "sentido" de uma proposição o qual explicamos na introdução. Vimos lá que a mesma proposição poderia ser expressa ou de maneira elementar ou de maneira não elementar, e que nos dois casos teríamos dois sinais proposicionais com o mesmo sentido, mas em diferentes sentidos da palavra "sentido". Exatamente o mesmo ocorre com funções proposicionais: considere "(y).yRx". Para qualquer valor de x ela é uma proposição expressa de modo não elementar, e também chamamos a função correspondente "$(y).yR\hat{x}$" de não elementariamente expressa para distingui-la de "$aR\hat{x}$", a qual nós chamamos de elementariamente expressa, pois seus valores são proposições elementares.

Esta distinção entre funções é exatamente análoga à distinção entre proposições; "elementar" não caracteriza a função, mas o modo em que ela é expressa; se houvesse apenas um número finito de coisas, poderíamos expressar "$(y).yR\hat{x}$" elementariamente como "$aR\hat{x}.bR\hat{x}.cR\hat{x}...$". Portanto, se tivéssemos dois signos expressando funções, uma de maneira elementar, a outra de outra maneira, os sentidos de "expressar" em que elas as expressam seriam diferentes. "$aR\hat{x}$" expressa relações relativamente simples com *a*, *R*, que são nomeados separadamente, "$(y).yR\hat{x}$" [expressa] em virtude de relações com *R* e com todos os objetos que não são nomeados, mas indicados pelo processo de generalização. É importante entender que a distinção não é meramente entre dois modos de expressar, mas entre dois sentidos de "expressar". Não é meramente como dois métodos de locomoção, sendo cada um deles locomoção no mesmo sentido determinado. Expressar um certo símbolo é manter certas relações com a realidade; ao introduzir o aparato da generalidade, nós alteramos o significado da palavra "expressa" e passa a incluir nela outras relações.

Chegamos agora a diferentes ordens de proposições e funções; primeiramente, há proposições elementares, i.e., aquelas expressas apenas pelo uso de proposições atômicas e operações de verdade. Então introduzimos variáveis individuais aparentes e funções generalizadas de indivíduos; chamamos as proposições construídas deste modo de proposições de *primeira ordem*. Chamamos as proposições que envolvem variáveis aparentes do tipo de funções de funções de indivíduos de proposições de *segunda ordem* e assim por diante. Pela ordem de uma função se quer indicar a ordem de seus valores.

Consequentemente, proposições "aRb", funções de indivíduos "$aR\hat{x}$" são elementares;

“(x).xRb”, “$(x).xR\hat{y}$” são de primeira ordem.

“(φ).φa ⊃ φb”, “$(\varphi).\varphi a \supset \varphi\hat{x}$” são de segunda ordem.

“$(F).F(\varphi\hat{x}) \supset \varphi a$”, “$(F).F(\varphi\hat{x}) \supset \varphi\hat{x}$” são de terceira ordem.

Vemos que a ordem não caracteriza, na verdade, a proposição ou a função, mas apenas o modo em que ela é expressa; ordem é o que Peano chamou de uma “pseudofunção”, como o numerador de uma fração. Assim, de “*a* = *b*” não podemos concluir “o numerador de *a* = o numerador de *b*” e do fato de que “p” e “q” são a mesma proposição não podemos concluir que elas possuem a mesma ordem.

Palavras como “sentido”, “significa”, “expressa” não apenas são ambíguas, mas é impossível descrever o conjunto completo de seus significados; trata-se, de fato, de uma “totalidade ilegítima”. Dizemos na introdução que “sentido” sempre se refere a alguns métodos de simbolização; pois que o sinal proposicional tenha tal e tal sentido significa que suas partes se relacionam de alguns modos com a realidade e se conectam de um certo modo. Estes “alguns modos” depende dos mecanismos de simbolização contemplados, e a introdução de um novo mecanismo, tal como um novo tipo de generalidade, altera o significado de “sentido”.

Vamos considerar, agora, a contradição “Eu estou mentido” ou “(∃ ‘p’, p):’p’ está na minha mente . p é o sentido de ‘p’ . ~p”. Aqui, devemos supor que “sentido” é definido precisamente de modo a incluir símbolos construídos de certas maneiras, digamos, tais que empregam variáveis aparentes até a ordem n (i.e. funções de funções de ... indivíduos; havendo aí n termos). Isto é, ‘p’ deve ser uma proposição de ordem não maior que n, i.e., se simbolizarmos por φ_n uma função de ordem n, ‘p’ pode ser “$(\exists\varphi_n):\varphi_{n+1}(\varphi_n)$”. Então, “Eu estou mentido”, que contém, como pode ser visto acima, “∃ ‘p’, p”, conterá, quado for analisado, “$\exists\varphi_{n+1}$” e não será de ordem n, no máximo, mas, no mínimo, de ordem n+1 e, assim, ela não é ela própria um valor possível para ‘p’. Então, se determinamos “Eu estou mentindo” como “Eu estou dizendo uma proposição falsa de ordem, no máximo, n”, isto seria de ordem n+1 e nenhuma contradição surgiria. Por outro lado, contudo, nós definimos “Eu estou mentido” como “Eu estou dizendo uma proposição falsa de qualquer ordem finita”. Isto significaria que ‘p’ pode ser de qualquer uma das formas “$(\exists\varphi_n):\varphi_{n+1}(\varphi_n)$” para todos os valores de n. Isto é, “Eu estou mentindo”, que contém “∃’p’”, seria da forma “$(\exists\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, ...\varphi_n...)$...”, a qual não é de uma ordem finita; então novamente não estaria incluída em si mesma. Vemos que é impossível especificar um tipo geral absoluto de proposição, pois “A assere uma tal proposição de si mesmo” seria uma proposição de um novo tipo.

Esta solução da contradição é obviamente bastante similar à solução de Russell, mas há uma diferença essencial, que é a seguinte:

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

enquanto, em seu sistema, a distinção de ordens caracteriza a proposição, no nosso ela apenas caracteriza o sinal. Este ponto pode se tornar mais claro pela seguinte consideração: suponha que em uma proposição P seja feita menção de outra p; isto pode acontecer de dois modos, os quais podemos descrever dizendo que ela ocorre ou de modo epistêmico ou de modo constitutivo[27]. Ele ocorre de modo epistêmico em “A diz p”, e de modo constitutivo em “p v q”.

Isto se aplica igualmente a funções proposicionais e conduz Russell à concepção de que “$(\varphi)F(\varphi\hat{x}, x)$” é de uma ordem essencialmente diferente da dos φ’s que nela ocorrem e não pode ser uma delas, ao passo que nós sustentamos que ela é uma delas, mas é expressa de uma maneira mais complicada.

Nossas soluções das outras contradições se mostram similares às dadas por Russell, mas com as mesmas diferenças em cada caso.

ISSN 2359-5140 (Online)
Ipseitas, São Carlos, vol.4, n.1, p. 200-253, jan-jul, 2018

27 Estes termos são, é claro, do Sr. Johnson, que não os usa, entretanto, neste contexto.